MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

Etude du savoir à enseigner dans le domaine de la trigonométrie

Warin, Samuel

Award date:
2017

Awarding institution:
Universite de Namur

UNIVERSITE DE NAMUR

Faculté des Sciences

ETUDE DU SAVOIR A ENSEIGNER DANS LE DOMAINE DE LA TRIGONOMETRIE.

Promotrice :

Valérie HENRY

Mémoire présenté pour l'obtention

du grade académique de master en « Sciences mathématiques à finalité didactique»

Samuel Warin

Juin 2017

Remerciements

Au moment d'écrire ces quelques lignes, mes pensées vont en premier lieu à Valérie Henry, ma promotrice. Sans elle, le manuscrit que vous tenez entre les mains ne serait pas ce qu'il est. Par ces quelques mots, je tiens à la remercier vivement pour la patience dont elle a fait preuve à mon égard. Je lui suis particulièrement reconnaissant pour les remarques pertinentes qu'elle m'a promulguées durant la réalisation de ce travail.

Je souhaiterais aussi remercier Marie Pierard pour ses relectures, ses bons conseils, bref son aide.

J'aimerais aussi dire merci à Dominique Lambert qui m'a ouvert les portes de sa bibliothèque. Sans notre discussion dans ce train de la ligne 154, je n'aurais pas eu accès à la pierre angulaire de ce travail.

Je tiens à remercier Mesdames Valérie Henry et Suzanne Thiry ainsi que Messieurs Alexandre Mauroy et Joseph Winkin pour le temps qu'ils ont consacré à la lecture de ces pages.

J'aimerais aussi remercier ma mère et mon père ainsi que mes quatre grands-parents pour toute l'aide qu'ils ont su m'apporter dans le cadre de ce travail mais aussi tout au long de mes années d'étude. Un tout grand merci pour les nombreuses corrections orthographiques. J'ai une pensée toute particulière pour Oma, ma grand-mère qui s'est perdue dans ses songes.

J'aimerais remercier Marjorie pour son soutien. Tu es l'unique personne qui sait que *seule la lumière pourrait...*

Je souhaiterais remercier la famille Touba et la famille Schalk pour l'accueil qu'ils m'ont réservé.

Enfin j'aimerais remercier les étudiants de Master ainsi que les membres passés et présents du Kotient ainsi que ceux du Cercle Math pour le temps que j'ai passé à leurs côtés. Cela a été une chance de pouvoir partager tant de choses avec eux. J'ose espérer que je pourrai vérifier les paroles du chant du Cercle.

J'aimerais aussi remercier Frédéric, Jean, Arnaud et Nicolas pour les heures partagées ensemble pendant nos séances de travail et pour ces années qui sont passées si vite.

Résumé

Depuis qu'ils sont sur terre, les hommes ont toujours voulu comprendre et expliquer ce qu'ils voyaient : les ombres qui bougent, les astres qui tournent, l'alternance du jour et de la nuit et celle des saisons, la grandeur des montagnes et la profondeur des vallées où ils vivaient, la grandeur de leur territoire.... A force d'observations et de réflexions, est apparue, entre beaucoup d'autres connaissances, la trigonométrie : la mesure par les triangles. D'abord intimement liée à l'astronomie, elle est devenue, plus tard, une science intégrée par les mathématiques.

L'ensemble du savoir relatif à la trigonométrie, développé au cours des siècles, est particulièrement vaste. La somme de toutes ces connaissances porte le nom de savoir savant dans la théorie de la transposition didactique qui a été mise au point par Y. Chevallard. Cette théorie s'intéresse à l'évolution du savoir savant dans le cadre de sa transmission. C'est cette théorie qui sert de base à la réflexion menée dans ce mémoire.

C'est donc pour favoriser leur transmission que les notions de trigonométrie ont subi de nombreuses transformations au cours des ans. L'objectif des ces mutations est de rendre les concepts trigonométriques plus accessibles et plus compréhensibles pour les élèves. Nous nous sommes donc efforcés de suivre la trace de cette évolution qui a transformé le savoir savant en savoir à enseigner. Pour ce faire, nous avons analysé des programmes et des ouvrages scolaires édités et utilisés dans les classes pendant la seconde moitié du siècle dernier. Le but de ces différentes analyses a été de nourrir une réflexion visant à comprendre les directions choisies pour faire évoluer les différentes notions.

Abstract

Ever since man came into being, he has wanted to understand and explain everything he saw : the shadows, the motion of the planets and stars, the change between day and night and between seasons, the height of the mountains and the depth of the valleys he lived in, the length of his territory... One day, all the thinking and observing led to the advent of, among other disciplines, trigonometry : using triangles to measure. At first strongly associated with astronomy, trigonometry has been integrated by mathematics some time later.

The amount of knowledge related to trigonometry is particularly large, as it has been developed during centuries. The addition of all this knowledge is called "learned knowledge" in Yves Chevallard's theory of didactic transposition, which focuses on the evolution of learned knowledge while it is taught. This theory will be the background of the reflexion leading this master's thesis.

To simplify their transmission, trigonometry notions were bound to evolve over the years. The point of those mutations is to make trigonometrical concepts more accessible and understandable for the students. During our reflection, we focused on the path of the evolution from learned knowledge to knowledge taught. Therefore, we analysed programmes and scholar books edited and used during the second half of the twentieth century. The purpose of those analyses was to help us understand the chosen directions concerning the evolution of those notions.

Table des matières

Introduction **1**

1 La transposition didactique et le savoir savant en trigonométrie **3**

1.1 La transposition didactique . . . 3
1.2 Le savoir savant en trigonométrie . . . 5
1.2.1 Présentation de l'ouvrage . . . 5
1.2.2 Le Traité de Trigonométrie rectiligne comme savoir savant . . . 5
1.2.3 Mesure des arcs et des angles : unités . . . 6
1.2.4 Nombres trigonométriques d'un angle aigu . . . 7
1.2.5 Arcs dirigés . . . 8
1.2.6 Cercle trigonométrique . . . 9
1.2.7 Angles dirigés . . . 10
1.2.8 Nombres trigonométriques d'un arc . . . 10
1.2.9 Relations entre les nombres trigonométriques de certains arcs . . . 14
1.2.10 Réduction au premier quadrant . . . 15
1.2.11 Variations des fonctions circulaires . . . 15
1.2.12 Inversion des fonctions circulaires . . . 18
1.2.13 Nombres trigonométriques d'un même arc (relations) . . . 19
1.2.14 Formules trigonométriques . . . 19
1.2.15 Tables trigonométriques et leur usage . . . 21
1.2.16 Équations et inéquations . . . 21

2 Analyse des programmes **23**

2.1 Programmes du deuxième degré . . . 23
2.1.1 Programmes analysés . . . 23
2.1.2 Notes historiques : le nombre d'heures . . . 23
2.1.3 Parcours . . . 23
2.2 Programmes du troisième degré . . . 24
2.2.1 Programmes analysés . . . 24
2.2.2 Parcours . . . 24

3 Analyse de manuels scolaires **27**

3.1 *M41 mathématique (De Boeck)* . . . 27
3.1.1 Angle . . . 28
3.1.2 Mesure d'angle, degré et radian . . . 29
3.1.3 Cercle trigonométrique . . . 30
3.1.4 Nombres trigonométriques . . . 30
3.1.5 Calcul trigonométrique . . . 32
3.1.6 Fonctions circulaires . . . 32
3.1.7 Équations . . . 34
3.1.8 Étude des triangles . . . 34
3.2 *Mathématique 2B (De Boeck)* . . . 36
3.2.1 Cercle trigonométrique . . . 36

3.2.2 Mesure d'angle, degré et radian . . . 37
3.2.3 Nombres trigonométriques . . . 38
3.2.4 Calcul trigonométrique . . . 40
3.2.5 Étude des triangles . . . 40
3.2.6 Équations . . . 41
3.3 *Mathématisons 46 (Manuel) (De Boeck)* . . . 42
3.3.1 Angle . . . 42
3.3.2 Mesure d'angle, degré et radian . . . 43
3.3.3 Cercle trigonométrique . . . 43
3.3.4 Nombres trigonométriques . . . 45
3.3.5 Équations . . . 45
3.3.6 Étude des triangles . . . 46
3.3.7 Algorithmes . . . 46
3.4 Mathématisons 53, de Mathématisons 55 et Mathématisons 57 . . . 47
3.4.1 Cercle trigonométrique . . . 48
3.4.2 Mesure d'angle, degré et radian . . . 48
3.4.3 Nombres trigonométriques . . . 48
3.4.4 Fonctions trigonométriques (circulaires) . . . 49
3.4.5 Équations et inéquations . . . 50
3.4.6 Dérivées . . . 50
3.4.7 Calcul trigonométrique . . . 50
3.5 Mathématique (M51, M52, M53) (De Boeck) . . . 51
3.5.1 Angles et cercles . . . 51
3.5.2 Mesure des angles, radian et degré . . . 52
3.5.3 Cercle trigonométrique . . . 53
3.5.4 Nombres trigonométriques . . . 53
3.5.5 Angles associés . . . 54
3.5.6 Triangles . . . 54
3.5.7 Produit scalaire . . . 54
3.5.8 Fonctions trigonométriques . . . 54
3.5.9 Formules de trigonométrie . . . 55
3.5.10 Équations et inéquations . . . 55
3.6 Savoir et savoir-faire en Mathématique (H. Dessain) . . . 56
3.6.1 Étude des triangles . . . 56
3.6.2 Angle . . . 56
3.6.3 Mesure d'angle, degré et radian . . . 57
3.6.4 Cercle trigonométrique . . . 57
3.6.5 Nombres trigonométriques . . . 57
3.6.6 Équations . . . 58
3.6.7 Règles des sinus . . . 58
3.7 Savoir et savoir-faire en mathématique (H. Dessain) . . . 58

4 Évolution de la présentation des notions et commentaires 59
4.1 Évolution . . . 59
4.1.1 Unités des mesures d'arcs et d'angles . . . 59
4.1.2 Arcs et angles . . . 60
4.1.3 Cercle trigonométrique . . . 60
4.1.4 Nombres trigonométriques . . . 60
4.1.5 Nombres trigonométriques des angles de 30°, 45° et 60° . . . 62
4.1.6 Relations entre les nombres trigonométriques des angles associés . . . 62
4.1.7 Réduction au premier quadrant . . . 63
4.1.8 Variation des fonctions circulaires . . . 64
4.1.9 Inversion des fonctions circulaires . . . 64
4.1.10 Relations entre les nombres trigonométriques d'un même arc . . . 65

4.1.11 Formules trigonométriques 66
4.1.12 Tables trigonométriques et calculatrice 68
4.2 Commentaires sur l'évolution des notions 68
4.2.1 Unités de mesure d'arcs et d'angles 68
4.2.2 Arcs et angles 70
4.2.3 Cercle trigonométrique 71
4.2.4 Tables trigonométriques, réduction au premier quadrant, angles associés et calculatrice 71
4.2.5 Variations des fonctions circulaires 72
4.2.6 Relations entre les nombres trigonométriques des angles associés 73
4.2.7 Formules trigonométriques 73
4.2.8 Nombres trigonométriques 73
4.2.9 Valeurs des nombres trigonométriques des angles particuliers 74
4.2.10 Conclusion 75
4.3 Questionnaire à destination des élèves 76

Conclusion **79**

A Annexe : Tables trigonométriques et leur usage **83**
A.1 Tables des valeurs naturelles 83
A.2 Tables de logarithmes 85
A.3 Résolution des équations élémentaires et du système $\sin x = a,\ \cos x = a$ 86
A.4 Différentes tables trigonométriques 86

B Annexe : Les équations et les inéquations **91**
B.1 Traité de Trigonométrie rectiligne 91
B.2 Équations dans *M41 mathématique (De Boeck)* 94
B.3 Équations dans *Mathématique 2B (De Boeck)* 95
B.4 Équations dans *Mathématisons 46 (Manuel) (De Boeck)* 95
B.5 Équations et inéquations dans *Mathématisons (53,55,57) (Manuels)(De Boeck)* . 95
B.6 Équations et inéquations dans *Mathématique (M51, M52, M53) (De Boeck)* . . . 96
B.7 Équations dans *Savoir et savoir-faire en Mathématique (H. Dessain)* 98
B.8 Évolution de la présentation des différentes techniques de résolution des équations et des inéquations trigonométriques 98

C Annexe : Questionnaire à destination des élèves **101**

D Annexe : la règle à calcul **105**
D.1 Introduction 105
D.2 Utilisation de la règle à calcul 105

Introduction

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la didactique. Il s'intéresse plus particulièrement à l'évolution, au cours du temps, des différentes notions de trigonométrie qui sont présentes dans les manuels scolaires. L'étude de cette évolution se basera principalement sur le concept de la transposition didactique qui a été développée par Y. Chevallard.

Après avoir détaillé ce qu'est la transposition didactique, nous nous intéresserons au savoir savant. Pour ce faire, nous analyserons le *Traité de Trigonométrie rectiligne* de N.-J. Schons. Le but de cette analyse est de lister les différentes notions de trigonométrie et de décrire la façon avec laquelle elles sont présentées. Ces deux éléments occuperont le premier chapitre de ce mémoire.

Le second chapitre s'intéressera, quant à lui, à la description des *programmes d'études*. Selon *Enseignement.be : le portail de l'enseignement en Fédération Wallonie-Bruxelles*[9], les *programmes d'études* sont « des référentiels de situations d'apprentissage, des contenus d'apprentissage, obligatoires ou facultatifs et d'orientations méthodologiques qu'un pouvoir organisateur définit afin d'atteindre les compétences fixées par le Gouvernement pour une année, un degré ou un cycle ». Nous les analyserons car les programmes font partie du savoir à enseigner. Ils prescrivent les éléments de savoir qui doivent être vus par les élèves au cours de leur apprentissage. D'ailleurs, les auteurs de manuels se basent sur les programmes pour écrire leur ouvrages.

Le troisième chapitre sera consacré à l'analyse de la partie réservée à la trigonométrie dans un total de sept manuels scolaires allant des années septante aux années quatre-vingt. L'objectif de cette analyse, à l'instar de la seconde partie du premier chapitre, est de réaliser un état des lieux des différentes notions et de la façon avec laquelle elles sont introduites. Cette description est directement en lien avec le savoir à enseigner. Cela permettra d'alimenter notre réflexion ultérieure.

Les trois premiers chapitres, très descriptifs, sont un passage obligé à la réflexion qui sera menée dans le chapitre quatre. La première partie de ce chapitre quatre tentera de résumer l'évolution qu'a subie chacune des notions. Il est clair qu'il sera impossible de toutes les dissocier les unes des autres. Nous ne pourrons pas analyser l'évolution de toutes les notions de manière indépendante. Certaines sont imbriquées les unes dans les autres. Dès lors l'évolution de l'une aura, irrémédiablement, des conséquences sur les autres. La seconde partie de ce chapitre quatre proposera des hypothèses permettant d'expliquer les causes de ces évolutions. Enfin, la troisième partie de ce chapitre sera dévolue à la présentation d'un questionnaire sur la trigonométrie à destination des élèves de quatrième et cinquième secondaire. Le but de ce dernier est d'analyser comment les élèves appréhendent les différents concepts de trigonométrie.

Enfin, nous terminerons ce travail par une conclusion et nous envisagerons un certain nombre de perspectives.

Chapitre 1

La transposition didactique et le savoir savant en trigonométrie

1.1 La transposition didactique

En 1991, Y. Chevallard théorise la transposition didactique. Il s'agit d'un processus qui fait le lien entre les recherches en mathématiques et l'enseignement des mathématiques.

L'objectif de ce processus est de rendre « enseignable », à des élèves, un ensemble d'éléments déterminés d'un savoir. Cela se fait par une série d'adaptations et de transformations de ces éléments, tout en veillant à garder leur sens fondamental.

Le processus de la transposition didactique se décompose en deux types de transpositions. Il met en jeu quatre types de savoir dont le passage de l'un à l'autre est assuré par trois acteurs. Ces différents éléments sont développés plus loin. La figure 1.1 schématise ce processus.

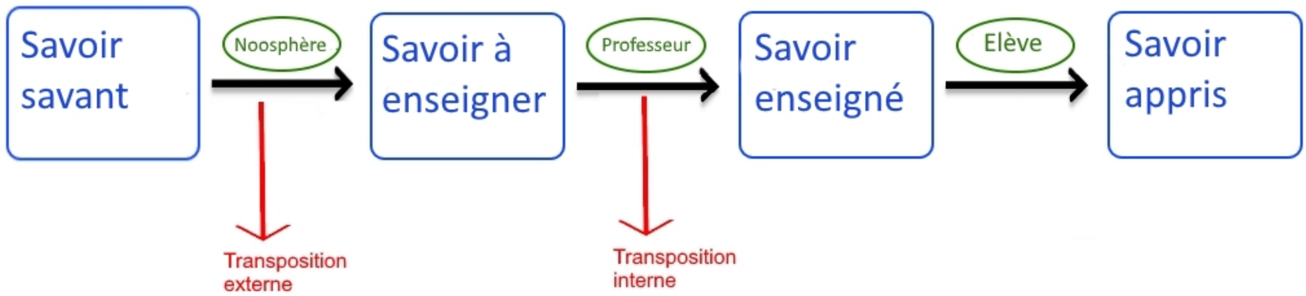


FIGURE 1.1 – Illustration de la transposition didactique

La transposition didactique distingue les quatre types de savoirs que voici :

- **Savoir savant :** savoir qui a été produit, validé et légitimé par la communauté scientifique. Cette dernière le possède et elle lui trouve un certain intérêt. Ce type de savoir est considéré comme le point de départ de la transposition didactique.
- **Savoir à enseigner :** savoir prescrit et décrit dans les textes ≪ officiels ≫. Il se retrouve typiquement dans les programmes de cours et les référentiels. C'est le savoir qui doit être enseigné.
- **Savoir enseigné :** savoir que le professeur enseigne aux élèves pendant les heures de cours. Ce savoir a été préalablement construit par le professeur. Il varie en fonction de la personnalité et de l'expérience de l'enseignant. C'est le point d'arrivée de la transposition didactique.
- **Savoir appris :** savoir qui est acquis par un élève pendant le cours d'un professeur.

Les acteurs suivants rendent possible le passage d'un type savoir à un autre :

- **Noosphère :** ensemble de groupes et de personnes qui prennent part de différentes façons à la transposition didactique externe. Ils s'intéressent plus aux contenus disciplinaires qu'aux méthodes pédagogiques. Parmi ces personnes se trouvent les représentants politiques, les auteurs de manuels, des professeurs appelés comme experts, les parents. Ces acteurs font le lien entre le savoir savant et le savoir à enseigner.
- **Professeur :** personne chargée de faire acquérir la connaissance ou la pratique -dans le cas qui nous intéresse- des mathématiques à autrui. Il fait la transition entre le savoir à enseigner et le savoir enseigné. Remarquons que le rôle de certains professeurs est double car ils font aussi partie de la noosphère.
- **Elève :** personne qui reçoit un enseignement. Il réalise le passage du savoir enseigné au savoir appris.

La transposition didactique se subdivise en deux formes :

- **Transposition externe :** transposition qui se fait en dehors de la classe. Ce sont les acteurs de la noosphère qui choisissent parmi les savoirs savants quels contenus devront être enseignés. Ces savoirs savants prendront alors le statut de savoir à enseigner. La sélection des éléments de savoirs dépend des nouvelles connaissances, de la société (valeurs et pratiques sociales), de l'influence des membres de la noosphère.
- **Transposition interne :** cette deuxième transposition transforme les savoirs à enseigner tels qu'ils se trouvent dans les programmes en savoirs enseignés dans les classes. Les acteurs de cette transposition sont les enseignants. Il est difficile de connaître avec précision ces savoirs enseignés car ils sont propres aux pratiques et à la sensibilité de chaque professeur.

Finalement, il faut remarquer qu'il y a une perte d'information importante lors de la transposition interne. En effet, il y a autant de savoirs enseignés que des professeurs. La construction d'un cours dépend fortement de la personnalité du professeur, de ses connaissances et de ses conceptions d'apprentissage. Mais une perte d'information encore plus forte a lieu avec le passage du savoir enseigné au savoir appris. Il y a autant de savoir appris que d'élèves car ils ne sont pas égaux vis-à-vis du savoir enseigné. Cela dépend, entre-autre, de leurs capacités cognitives.

1.2 Le savoir savant en trigonométrie

1.2.1 Présentation de l'ouvrage

Le *Traité de Trigonométrie rectiligne* a été écrit par N.-J. Schons. Il fait partie d'une collection comptant dix-huit titres. Il est à l'usage de l'Enseignement Moyen et Normal et de l'Enseignement Technique Secondaire. Plus précisément, selon la nomenclature qui a été mise au point dans cette collection, ce *Traité de trigonométrie rectiligne est adapté aux cycles supérieurs des humanités (y compris les écoles normales) et de l'Enseignement Technique, dénommés ≪ utilisateurs forts ≫ des mathématiques.* Il est précisé que *dans l'enseignement moyen, ≪ utilisateurs forts ≫ désigne les sections scientifiques A et latin-mathématiques.*

Enfin remarquons que le livre que nous avons analysé datait de 1971. Il s'agissait de la sixième édition du *Traité de Trigonométrie rectiligne.* Nos recherches nous ont permis de déterminer la date de la première édition. Le *Traité* a été édité pour la première fois en 1941. C'est cette date que nous allons retenir pour la suite de ce travail.

1.2.2 Le Traité de Trigonométrie rectiligne comme savoir savant

Afin d'appréhender le savoir savant relatif à la trigonométrie qui est apprise dans les classes de l'enseignement secondaire, nous avons choisi d'analyser le *Traité de Trigonométrie rectiligne* de N.-J. Schons. Comme nous l'avons évoqué lors de la présentation de l'ouvrage, ce livre était destiné à une utilisation dans les classes de mathématiques. Il n'appartient donc pas à proprement parler du savoir savant tel qu'il a été défini. Néanmoins, plusieurs éléments ont fait que nous avons quand même classé le contenu de ce livre comme savoir savant.

En observant, d'abord, l'ensemble des titres de la collection proposés par N.-J. Schons et la maison d'édition *La procure*, nous remarquons que leur volonté était de recouvrir tout le spectre des mathématiques qui pouvaient être vu en secondaire à l'époque de la sortie de ces livres.

De plus certains titres de cette collection comme *Éléments de Calcul intégral B* ou *Traité d'Algèbre A* en passant par *Complément d'Arithmétique et d'Algèbre B* sont évocateurs d'une certaine volonté d'exhaustivité.

Enfin, le contenu du *Traité de Trigonométrie rectiligne* à l'instar de celui des autres titres de la collection N.-J. Schons est différent du contenu des autres manuels qui ont été analysés. Nous pouvons considérer le *Traité* comme un livre de référence qui compile un grand nombre de notions de trigonométrie. Toutes sont justifiées parfois de plusieurs façons. Il est à l'image de certains *syllabi* que nous pouvons retrouver dans l'enseignement supérieur.

Étant donné que ce *Traité* regroupe plus de matière que les autres manuels et qu'il est le plus ancien, nous l'avons utilisé comme base pour décrire l'évolution du savoir savant en trigonométrie.

En ce qui concerne l'analyse du *Traité de Trigonométrie*, nous n'évoquerons que les notions que nous jugerons intéressantes. En effet, l'ensemble des notions présentes dans cet ouvrage dépasse largement la matière qui doit être vue par des élèves de l'enseignement secondaire. Par exemple, ce livre donne un grand nombre de propriétés dans le but de résoudre des triangles quelconques. Il présente aussi différentes méthodes pour résoudre des équations trigonométriques à deux inconnues. Ces différents éléments ne seront pas traités dans les lignes qui suivent.

1.2.3 Mesure des arcs et des angles : unités

Remarquons d'abord qu'une distinction est faite entre la mesure des arcs et la mesure des angles.

Pour la mesure des arcs, trois unités sont proposées. Pour chacune d'entre-elles voici leur définition :

- Le degré *est la 90e partie du quadrant* ;
- Le grade (gr) *est la centième partie du quadrant* ;
- Le radian (rad) *est un arc dont la longueur est égale à celle du rayon.* A partir de la formule,
  $$C = 2\pi R \text{ avec } C \text{ la longueur du cercle et } R \text{ le rayon,}$$
  il est précisé que l'*arc radian est contenu* 2π *fois dans le cercle.* De plus, la relation
  $$1 \ radian = \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44", 806 \ldots$$
  est donnée.

Ensuite un tableau *donne les mesures de quelques arcs remarquables.*

Quadrants	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3	4
Degrés	30	45	60	90	135	180	270	360
Grades		50		100	150	200	300	400
Radians	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

TABLE 1.1 – Table des mesures de quelques arcs remarquables dans différentes unités (extrait de [21])

La phrase *un angle a la même mesure que l'arc qu'il intercepte sur tout cercle décrit de son sommet comme centre, à condition de prendre pour unité d'angle celui qui correspond à l'unité d'arc* permet de faire le lien entre la mesure des arcs et la mesure des angles. De nouvelles définitions des trois unités mentionnées plus haut sont alors données. Elles s'inscrivent, maintenant, dans le cadre de la mesure des angles. Les voici :

- *Le degré est la* 90^e *partie de l'angle droit;*
- *Le grade est la* 100^e *partie de l'angle droit;*
- *L'angle radian est l'angle qui intercepte un arc égal au rayon sur tout cercle décrit de son sommet comme centre.*

Pour obtenir la mesure d'un angle, le *Traité* précise qu'il *suffit de tracer avec un rayon quelconque un cercle ayant pour centre le sommet de l'angle et de mesurer l'arc compris entre les côtés de l'angle.*

Le livre mentionne le théorème suivant : *lorsqu'un angle XOY intercepte un arc égal au rayon sur un cercle décrit de son sommet O comme centre, il intercepte un arc égal au rayon sur tout autre cercle décrit de O comme centre.* Ce théorème sert de base à la définition du radian.

Les égalités
$$\frac{arc\ AB}{demi - cercle} = \frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{r}{\pi}$$
où

- d est la mesure en degré de l'arc AB ;
- g est la mesure en grade de l'arc AB ;
- r est la mesure en radian de l'arc AB,

permettent, à partir d'une des mesures, de connaître les deux autres.

1.2.4 Nombres trigonométriques d'un angle aigu

Dans un premier temps, le *Traité de Trigonométrie rectiligne* oppose la mesure et le calcul comme moyen de déterminer les valeurs inconnues d'un triangle rectangle. Il est montré que le procédé graphique en utilisant un instrument de mesure est moins précis que les calculs.

Dans un second temps, les *nombres trigonométriques des angles aigus et des arcs inférieurs à un quadrant* sont définis. A partir d'un point sur l'un des côtés d'un angle, une perpendiculaire est abaissée afin de créer un triangle rectangle. C'est sur base de cette forme géométrique que le sinus, le cosinus et la tangente sont définis comme des rapports des longueurs des côtés du triangle rectangle. Ces trois rapports sont appelés *nombres trigonométriques ou rapports trigonométriques.* Trois autres nombres trigonométriques, à savoir la cotangente, la sécante et la cosécante, sont définis comme l'inverse des ceux qui viennent d'être définis. Remarquons aussi que la cotangente est aussi considérée comme un rapport de longueurs des côtés du triangle rectangle.

En utilisant le théorème de Thalès et la construction de la figure 1.2, le *Traité* stipule que *le rapport trigonométrique de l'angle* a *est indépendant de la position du point* M. Toujours en se référant à cette figure, le *Traité* dit que *les nombres trigonométriques de l'angle* a *sont aussi les nombres trigonométriques de l'arc* a. Par comparaison des rapports, il est aussi montré que *le sinus d'un angle est égal au cosinus du complément et que la tangente d'un angle est égale à la cotangente de l'angle complémentaire.*

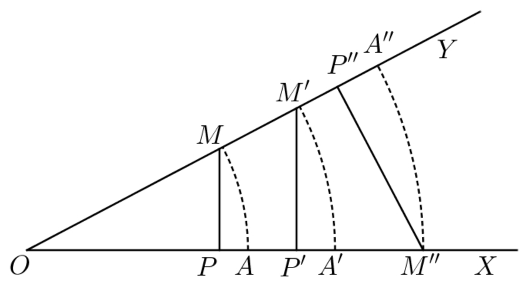


FIGURE 1.2 – Indépendance des nombres trigonométriques par rapport à la position du segment (inspiré de [21])

La recherche des nombres trigonométriques de différents angles se fait sur la base de la construction telle que celle de la figure 1.3. Sur celle-ci, la mesure de l'arc AM est inférieure à 90° et, en considérant que R est la longueur du rayon du cercle,

$$\sin AM = \frac{\frac{\overline{MM'}}{2}}{R}$$

$$\cos AM = \frac{\overline{OP}}{R}.$$

Le *Traité* précise aussi qu'en latin sinus signifie pli, *un sinus est en quelque sorte une corde pliée en deux.* Fort de ces constats, en considérant *un polynôme régulier inscrit à un cercle*, les deux règles suivantes sont énoncées :

1. Le sinus de la moitié de l'angle au centre est le rapport au rayon de la moitié du côté du polynôme régulier ;
2. Le cosinus de la moitié de l'angle au centre est le rapport au rayon de l'apothème du polygône.

La recherche des nombres trigonométriques se fait à partir de ces deux règles et de formules géométriques. Par exemple, à partir d'un hexagone régulier inscrit à un cercle comme celui de la figure 1.3, il y a moyen de découvrir les nombres trigonométriques d'un angle de 30°. L'*angle au centre est de* 60 *°.* En divisant cet angle en deux, deux angles de 30° sont formés. Chacun d'entre eux a un côté qui correspond à R, le rayon du cercle, et l'autre correspond à a, l'apothème de l'hexagone. L'égalité qui lie c la longueur du côté de l'hexagone avec le rayon du cercle R et la formule $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ qui permet de faire le lien entre l'apothème et le rayon du cercle permettent d'obtenir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
\sin 30^\circ &= \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2} \\
\cos 30^\circ &= \frac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
\end{aligned}$$

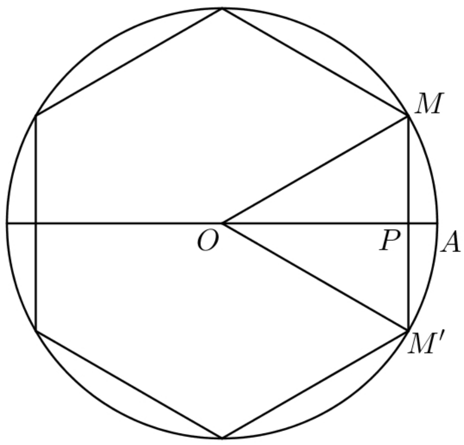


FIGURE 1.3 – Hexagone régulier servant à la recherche des nombres trigonométriques d'un angle de 30° (inspiré de [21])

Un raisonnement similaire est mené avec un carré afin d'obtenir les nombres trigonométriques de l'angle de 45°. Pour les nombres trigonométriques de l'angle de 60°, c'est un triangle équilatéral qui est utilisé.

1.2.5 Arcs dirigés

La notion d'arc dirigé est introduite à partir de trois points sur le cercle : deux points fixes A et B et un troisième mobile. Avec, comme départ le point A, le point mobile *se déplace sur le cercle dans le même sens et s'arrête à un quelconque des instants où il coïncide avec* B*.* Ce point décrit *un arc* AB*, dont l'origine est* A *et l'extrémité est* B*.*

Le point mobile pouvant de déplacer dans un sens comme dans l'autre, un des sens est arbitrairement choisi comme *sens positif* et l'autre comme *sens négatif.* Dans le *Traité*, le sens positif est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Dès lors, un *cercle orienté* est *un cercle sur lequel on a choisi un sens positif.*

Un arc AB sur un cercle orienté a *une mesure ou une valeur algébrique qui est le nombre relatif qui a pour valeur absolue la longueur de l'arc et pour signe + ou −, suivant que l'arc est décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif.* La mesure algébrique de l'arc AB est notée $\widehat{AB}$. Le *Traité* spécifie que l'unité par défaut est le radian.

Des *arcs particuliers* sont définis :

- *Deux arcs sont complémentaires quand leur somme est* $\frac{\pi}{2}$ *;*
- *Deux arcs sont supplémentaires quand leur somme est* π *;*
- *Deux arcs sont opposés quand leur somme est* 0.

Les arcs de cercle ayant une infinité de déterminations, *la formule générale des arcs d'origine* A *et d'extrémité* B *est donnée par* $a + 2n\pi$ où a *est la valeur du plus petit arc positif* AB et n *étant un nombre entier arbitraire, positif, négatif ou nul.* [1]

Ensuite, l'abscisse curviligne est définie de la façon suivante : *sur un cercle orienté* O*, considérons un point fixe* A [qui est] *l'origine des arcs, l'abscisse curviligne d'un point* M *du cercle* [est] *la valeur d'un quelconque des arcs* AM*.*

1.2.6 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est illustré sur la figure 1.4. Il s'agit d'*un cercle orienté de centre* O *dont le rayon est l'unité de longueur.* Le point A est *l'origine des arcs* tandis que B est déterminé de façon que *le plus petit arc positif* AB *soit un quadrant. Les axes rectangulaire* $A'OB$ *et* $B'OB$ sont tracés et ils déterminent les quatre quadrants.

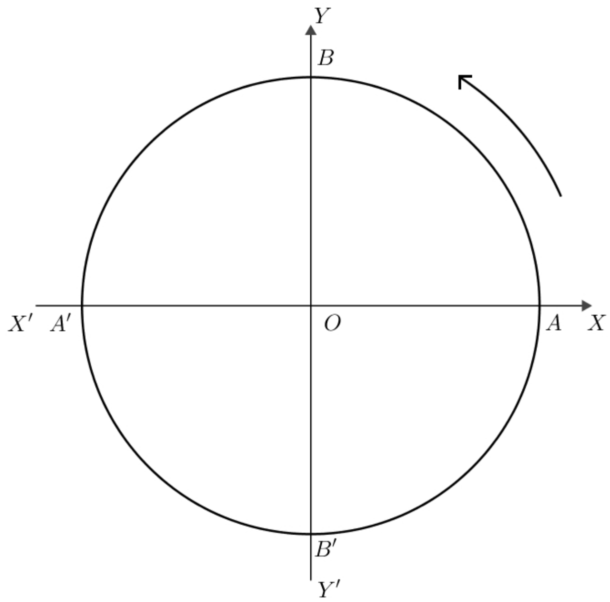


FIGURE 1.4 – Cercle trigonométrique (inspiré de [21])

1. Remarquons que le *Traité* confond l'arc et sa mesure Il évoquera *l'arc* $\frac{\pi}{2}$. au lieu de parler de *l'arc de mesure* $\frac{\pi}{2}$.

1.2.7 Angles dirigés

Tout d'abord, c'est la notion d'angle qui est définie. À deux demi-droites OA[2] et OB ayant la même extrémité O, une troisième demi-droite OM est ajoutée. Cette dernière va pouvoir tourner, toujours dans le même sens, autour du point O. Sa position de départ coïncide avec la demi-droite OA. La rotation s'arrête *à un quelconque des instants où OM coïncide avec OB.* Il est dit que *OM décrit un angle AOB ou* (OA, OB). La demi-droite OA est le *côté origine* et OB est le *côté extrémité.* A partir de là, la notion de sens qui est définie à partir d'une demi-droite OA incluse dans un plan et tournant autour de son extrémité, le point O. L'un des sens de rotation est appelé *le sens positif* tandis que l'autre est *le sens négatif.* A partir de cette notion, *un plan est orienté quand on a choisi un sens positif.*

La définition de la mesure d'un angle dirigé est illustrée par la figure 1.5 où un cercle est orienté de la même façon que le plan orienté qui le contient, est représenté. Sur ce cercle, pendant que *le point mobile M décrit un arc AB, la demi-droite mobile OM décrit un angle AOB et réciproquement.* La *mesure (ou valeur) algébrique d'un angle AOB* est *le nombre relatif qui est la mesure algébrique de l'arc AB correspondant.* La notation de la mesure d'un angle AOB est AOB[3] ou (OA, OB) et cette mesure possède une infinité de valeurs.

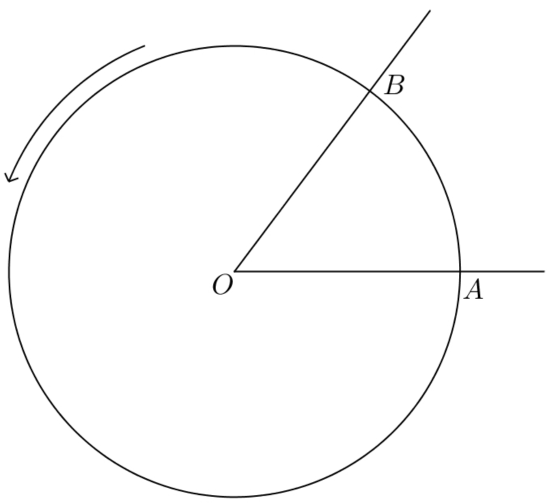


FIGURE 1.5 – Illustration de la définition de la mesure d'un angle dirigé (inspiré de [21])

1.2.8 Nombres trigonométriques d'un arc

Les premiers nombres trigonométriques d'un arc à être définis ailleurs que dans le triangle rectangle sont le sinus et le cosinus. Ces définitions sont illustrées par la figure 1.6. Décrivons-la. Nous nous intéressons au sinus et au cosinus de l'arc AM présent sur le cercle orienté O. Il est précisé que la mesure de cet arc vaut a. À l'intérieur du cercle, les deux axes $A'A$ et $B'B$ dits *rectangulaires* ont été tracés. À partir du point M, qui est l'extrémité de l'arc de cercle, le vecteur $\overrightarrow{PM}$ perpendiculaire à $A'A$ et le vecteur $\overrightarrow{QM}$ perpendiculaire à $B'B$ ont été tracés.

2. Les notations de [21] ont été conservées.
3. Les notations de [21] ont été conservées.

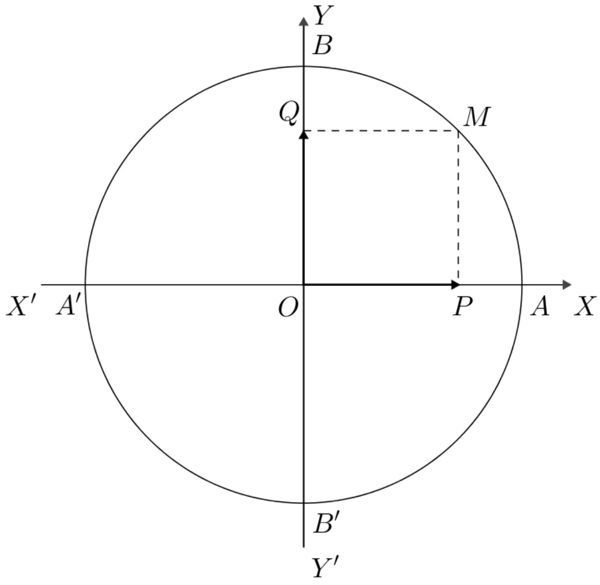


Figure 1.6 – Illustration du sinus et du cosinus (inspiré de [21])

Voici les définitions des nombres trigonométriques sinus et cosinus :

- *On appelle sinus de l'arc a le rapport de la longueur PM au rayon, ce rapport étant affecté du signe + ou du signe −, suivant que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe $B'B$;*
- *On appelle cosinus de l'arc a le rapport de la longueur QM au rayon, ce rapport étant affecté du signe + ou du signe −, suivant que le vecteur $\overrightarrow{QM}$ est décrit dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe $A'A$.*

Dans le cas où *l'angle AOM est aigu*, les définitions donnent les formules [4] suivantes :

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{PM}{OM} \\ \cos a &= \frac{QM}{OM} = \frac{OP}{OM} \end{aligned}$$

Il est aussi précisé que ces définitions *sont valables, quelle que soit l'unité de longueur.* A partir de ce moment et pour toutes les parties théoriques de ce *Traité*, *le rayon OM est alors l'unité de longueur.* Les définitions en sont alors légèrement modifiées :

- *Le sinus de l'arc a est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{PM}$;*
- *Le cosinus de l'arc a est la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{QM}$.*

Les formules deviennent

$$\begin{aligned} \sin a &= \overline{PM} = \overline{OQ} \\ \cos a &= \overline{QM} = \overline{OP}. \end{aligned}$$

4. Les notations de [21] ont été conservées.

Le *Traité* propose deux autres *énoncés* pour définir le sinus et le cosinus :

1. *Le cosinus de l'arc a est la mesure algébrique* $\overline{OP}$ *de la projection du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *sur l'axe* $A'A$*, et son sinus est la mesure algébrique* $\overline{OQ}$ *de la projection du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *sur l'axe* $B'B$ *;*
2. *En prenant les axes* $A'A$ *et* $B'B$ *pour axes de coordonnées, le cosinus de l'arc a est l'abscisse du point* M*, et son sinus est l'ordonnée du point* M*.*

Ensuite, quatre autres nombres trigonométriques ou *rapports trigonométriques* de l'arc a sont définis sous une forme fractionnaire. Ces quatre nombres sont *la tangente, la cotangente, la sécante* et *la cosécante*

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} a &= \frac{\sin a}{\cos a} \\
\operatorname{cotg} a &= \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{\sin a} \\
\text{séc}\, a &= \frac{1}{\cos a} \\
\text{coséc}\, a &= \frac{1}{\sin a}.
\end{aligned}$$

Le livre fait aussi un certain nombre de remarques au niveau des notations. Par exemple, *on convient d'écrire* $\cos^2 a$ *au lieu de* $(\cos a)^2$ *;* $\sin 2a$ *au lieu de* $\sin(2a)$*.* Ces remarques sont faites car *les nombres trigonométriques d'un arc ne sont pas proportionnels à cet arc.* Afin d'éviter les quiproquo, le *Traité* encourage de lire $\frac{1}{2}\sin a$ comme un *demi sinus a* et $\sin\frac{a}{2}$ comme *sinus demi a* ou *sinus a demi* en prenant garde de ne pas inverser les deux.

En observant la figure 1.7, il est possible de déterminer les signes du sinus et du cosinus en fonction du quadrant dans lequel se termine l'arc. En tenant compte des différentes définitions des nombres trigonométriques, quatre principes concernant les signes de ces derniers peuvent être énoncés. Les voici :

1. *Dans le premier quadrant, tous les nombres trigonométriques sont positifs ;*
2. *Dans le 2ᵉ quadrant, les nombres positifs sont le sinus et la cosécante ;*
3. *Dans le 3ᵉ quadrant, les nombres positifs sont la tangente et la cotangente ;*
4. *Dans le 4ᵉ quadrant, les nombres positifs sont le cosinus et la sécante.*

De ces quatre principes découlent trois autres règles :

I *Le sinus et la cosécante ne sont positifs que dans le 1ᵉʳ et le 2ᵉ quadrant ;*
II *La tangente et la cotangente ne sont positives que dans le 1ᵉʳ et le 3ᵉ quadrant ;*
III *Le cosinus et la sécante ne sont positifs que dans le 1ᵉʳ et le 4ᵉ quadrant.*

Les valeurs des nombres trigonométriques des arcs multiples d'un quadrant sont données. Ces valeurs sont décrites en se basant sur le fait que, si pour un arc donné, le sinus est nul alors le cosinus vaut ± 1 et réciproquement. Du fait que le cosinus de certains arcs est nul, il est impossible d'en déduire la tangente et la sécante car *une fraction avec un dénominateur nul ne représente aucun nombre. On dit que leur tangente et leur sécante sont infinies.* De même, il est impossible de déduire la cotangente et la cosécante des arcs dont le sinus est nul.

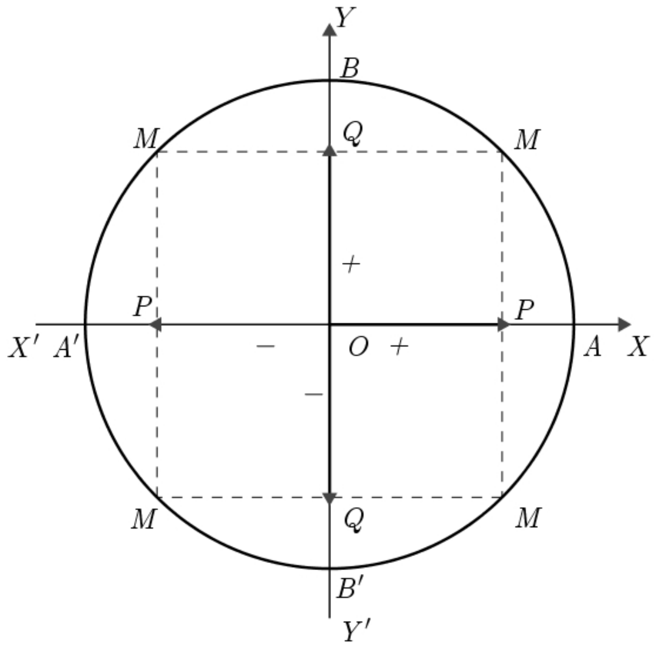


FIGURE 1.7 – Illustration des signes des nombres trigonométriques (inspiré de [21])

Le *Traité* s'intéresse aussi à la représentation de la tangente et de la cotangente. La figure 1.8 est utilisée pour la tangente. En considérant l'arc AM de mesure a, il est montré que $\operatorname{tg} a$ *est représentée par le vecteur* $\overrightarrow{AT}$ *c'est-à-dire*

$$\overline{AT} = \operatorname{tg} a = \frac{\sin a}{\cos a}.$$

Pour prouver cette formule, deux raisonnements sont proposés. Le premier fait intervenir deux triangles semblables et le théorème de Thalès. Le second raisonnement utilise les équations de droites. Celui effectué pour illustrer la formule de la cotangente fait aussi intervenir des triangles semblables.

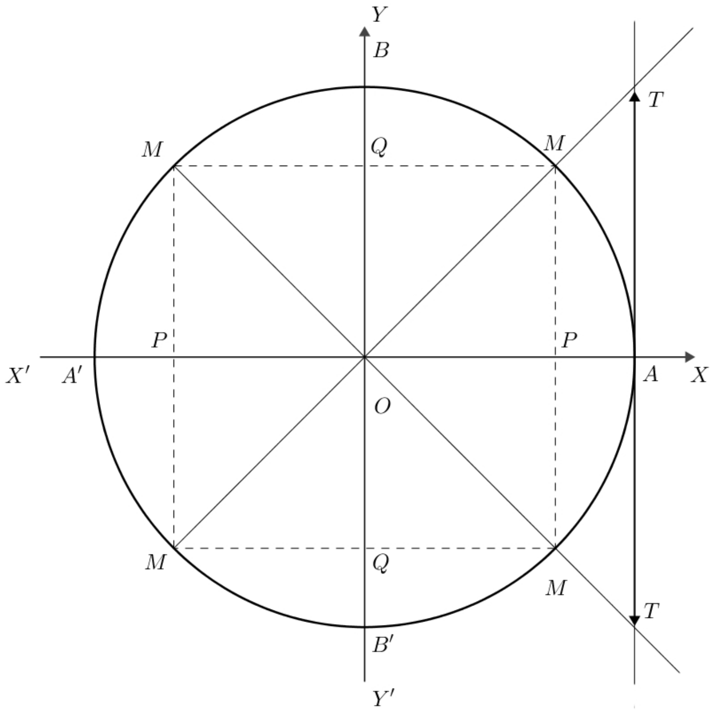


FIGURE 1.8 – Représentation de la tangente (inspiré de [21])

1.2.9 Relations entre les nombres trigonométriques de certains arcs

Dans cette partie, cinq principes sont énoncés et démontrés :

1er Principe. *Si deux arcs sont différents d'un nombre entier de cercles, ils ont même sinus, même cosinus et même tangente ;*

2e Principe. *Si deux arcs sont supplémentaires, ils ont des sinus égaux, des cosinus opposés et des tangentes opposées ;*

3e Principe. *Si la différence de deux arcs est un demi-cercle, ils ont des tangentes égales, des sinus opposés et des cosinus opposés ;*

4e Principe. *Si deux arcs sont opposés ou si leur somme est un cercle, ils ont des cosinus égaux, des sinus opposés et des tangentes opposées ;*

5e Principe. *Si deux arcs sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre, la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre, la sécante de l'un est égale à la cosécante de l'autre.*

Dans les quatre premiers principes, le sinus, le cosinus et la tangente peuvent être respectivement remplacés par la cosécante, la sécante et la cotangente. Le *Traité* mentionne aussi que *les quatre derniers principes sont des cas particuliers des quatre théorèmes suivants :*

I Si la somme de deux arcs est un multiple impair de π, ils ont des sinus égaux, des cosinus opposés et des tangentes opposées ;

II Si la différence de deux arcs est un multiple impair de π, ils ont des tangentes égales, des sinus opposés et des cosinus opposés ;

III Si la somme des deux arcs est un multiple pair de π, ils ont des cosinus égaux, des sinus opposés et des tangentes opposées ;

IV Si la somme de deux arcs est $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre, la tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre, la sécante de l'un est égale à la cosécante de l'autre.

À partir du 4e principe et du 5e principe, les relations entre les nombres trigonométriques des *arcs qui diffèrent de $\frac{\pi}{2}$* sont données.

1.2.10 Réduction au premier quadrant

Comme le dit le livre, *la réduction au premier quadrant a pour but d'évaluer tout nombre trigonométrique d'un arc quelconque en fonction du nombre trigonométrique de même nom d'un arc compris entre* 0° *et* 90°.

Pour réaliser cette réduction, un mode opératoire utilisant les principes évoqués à la section 1.2.9 est proposé :

1° *Si l'arc est négatif, on applique le* 4^e *principe en vue de passer à l'arc opposé qui est positif ;*

2° *Si l'arc est positif et supérieur à* 360°*, on applique le 1er principe après avoir cherché le reste par défaut de la division de l'arc par* 360°*; on obtient ainsi un nombre trigonométrique d'un arc positif et inférieur à* 360°*;*

3° *Si l'arc est inférieur à* 90°*, la réduction est terminée ; dans le cas contraire, on applique le 2e, 3e, 4e principe suivant que l'arc est du 2e, 3e, 4e quadrant.*

1.2.11 Variations des fonctions circulaires

Après avoir défini les différents nombres trigonométriques, le livre fait varier x de $-\infty$ à $+\infty$ où x est *le nombre relatif* [mesurant] *en radian un arc quelconque pris sur le cercle trigonométrique.* Les fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\operatorname{séc} x$ et $\operatorname{coséc} x$ sont alors obtenues. Ces fonctions sont appelées *fonctions circulaires directes* et leur variable indépendante est x. L'appellation fonction est justifiée par le fait qu'*à toute valeur de x correspond une valeur bien déterminée de* $\sin x$, $\cos x$,....

Seules les variations de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{cotg} x$ sont étudiées. C'est d'abord la fonction sinus qui est étudiée sur l'intervalle $(0, 2\pi)$. Comme illustré sur la figure 1.9, en faisant croître x de 0 à 2π, *le point M décrit alors les quatre quadrants du cercle trigonométrique dans le sens positif, à partir de A.* En répertoriant les différentes mesures du vecteur $\overrightarrow{OQ}$, *qui est égal à* $\sin x$, le tableau des variations 1.2 est obtenu.

x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\sin x$	0	$\nearrow$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

TABLE 1.2 – Tableau des variations du sinus (extrait de [21])

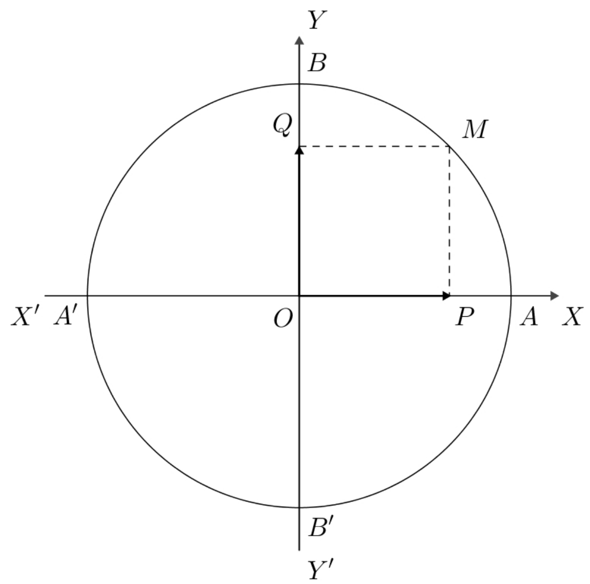


FIGURE 1.9 – Illustration des variations du sinus et du cosinus (inspiré de [21])

Étant donné que *le sinus d'un arc ne change pas quand on augmente ou qu'on diminue l'arc d'un multiple de* 2π, le tableau peut être *continué, sans calcul, vers la droite et vers la gauche. La courbe illimitée* de la figure 1.10 est obtenue en plaçant les différentes valeurs sur un graphe [5]. Cette courbe porte le nom de *sinusoïde*.

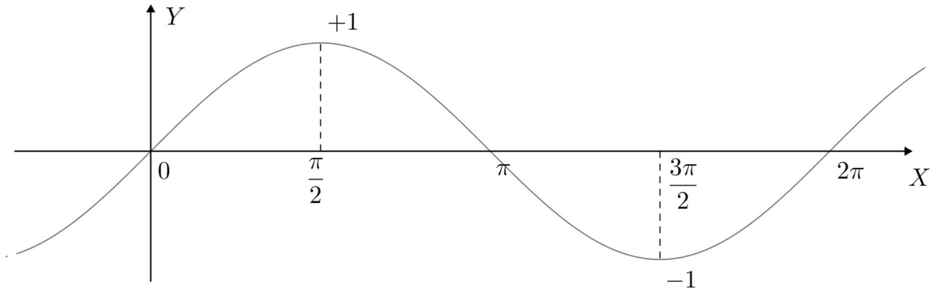


FIGURE 1.10 – Représentation de la *sinusoïde* (inspiré de [21])

Un raisonnement analogue est mis en place pour étudier *les variations du cosinus.* Le tableau 1.3 est obtenu *en observant les variations de la mesure du vecteur* $\overrightarrow{OP}$ de la figure 1.9.
Comme pour le sinus, ce tableau peut être continué à gauche et à droite. La figure 1.11 *représente la courbe illimitée appelée cosinusoïde,* obtenue en reportant les valeurs du tableau sur un graphe [5].

x	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
$\cos x$	$+1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+1$

TABLE 1.3 – Tableau des variations du cosinus (extrait de [21])

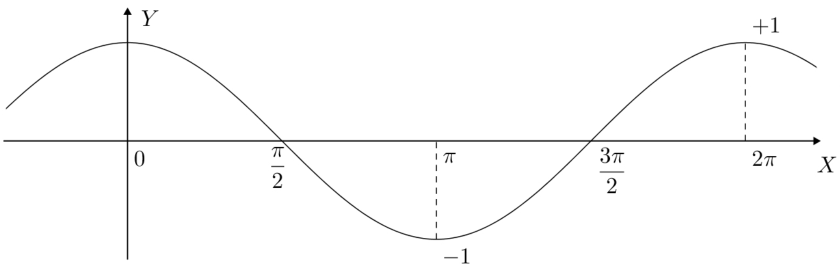


FIGURE 1.11 – Représentation de la *cosinusoïde* (inspiré de [21])

Les variations de la tangente et de la cotangente sur $(0, \pi)$ sont obtenues en observant respectivement *les variations de la mesure du vecteur* $\overrightarrow{AT}$ sur le cercle de gauche de la figure 1.12 qui représente $\operatorname{tg} x$ et *les variations de la mesure du vecteur* $\overrightarrow{BS}$ sur le cercle de droite de la figure 1.12 qui représente $\operatorname{cotg} x$.

5. Le *Traité* dessine la courbe malgré le fait que très peu d'informations soient disponibles.

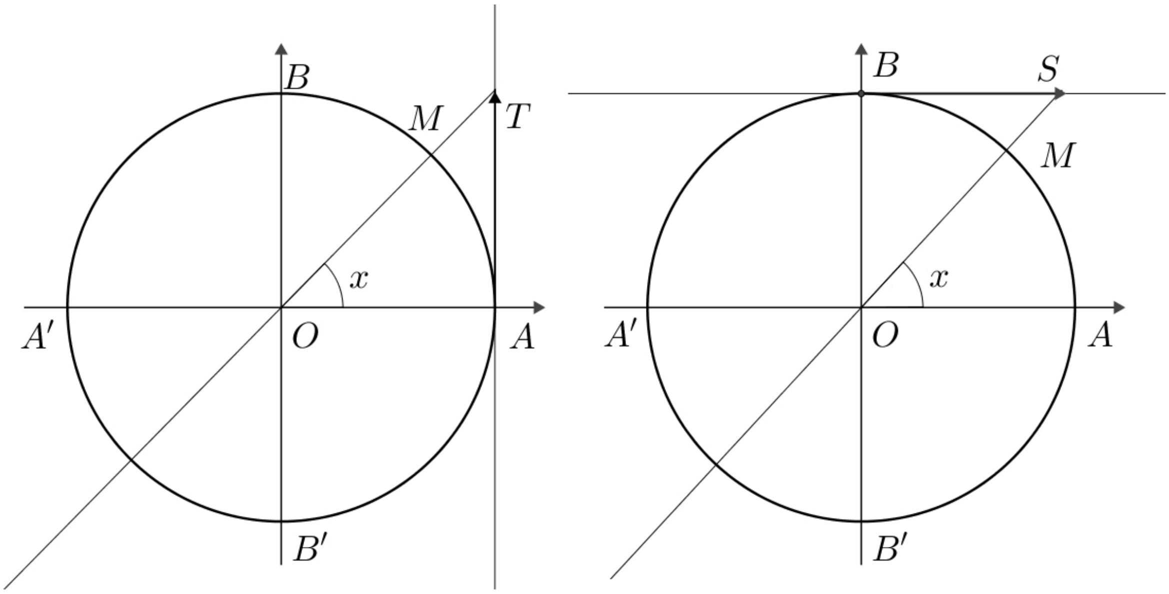


Figure 1.12 – Illustration des variations de la tangente et de la cotangente (inspiré de [21])

Le tableau 1.4 résume ces variations en répertoriant les différentes valeurs :

x	0		$\nearrow$		$\frac{\pi}{2}$		$\nearrow$		π
$\operatorname{tg} x$	0		$\nearrow$	$+\infty$	$\vert$	$-\infty$	$\nearrow$		0
$\operatorname{cotg} x$	$\vert$	$+\infty$	$\searrow$		0		$\searrow$	$-\infty$	$\vert$

Table 1.4 – Tableau des variations de la tangente et de la cotangente (inspiré de [21])

Étant donné que *la tangente et la cotangente d'un arc ne changent pas quand on augmente ou que l'on diminue l'arc d'un multiple de* π*,* le tableau peut être *continué, sans calcul, vers la droite et vers la gauche.* Les courbes des fonctions $y = \operatorname{tg} x$ et $y = \operatorname{cotg} x$ portent respectivement le nom de *tangentoïde* et *cotangentoïde.* La figure 1.13 représente la *tangentoïde* encore une fois obtenue par rapport des différentes valeurs du tableau sur le graphe [6].

Après l'étude des variations de ces différentes *fonctions circulaires directes*, le *Traité* propose deux conclusions :

I *Si le nombre* a *représente un sinus ou un cosinus,* [où] $-1 \leqslant \mathrm{a} \leqslant 1$ *ou* $|\mathrm{a}| \leqslant 1$*. Réciproquement, si* a *est inférieur ou égal en valeur absolue à 1,* a *peut représenter un sinus ou cosinus, et dans ce cas seulement ;*

II La tangente et la cotangente peuvent prendre toutes les valeurs. Réciproquement, un nombre quelconque peut représenter une tangente ou une cotangente.

6. Le *Traité* dessine les courbes malgré le fait que très peu d'informations soient disponibles.

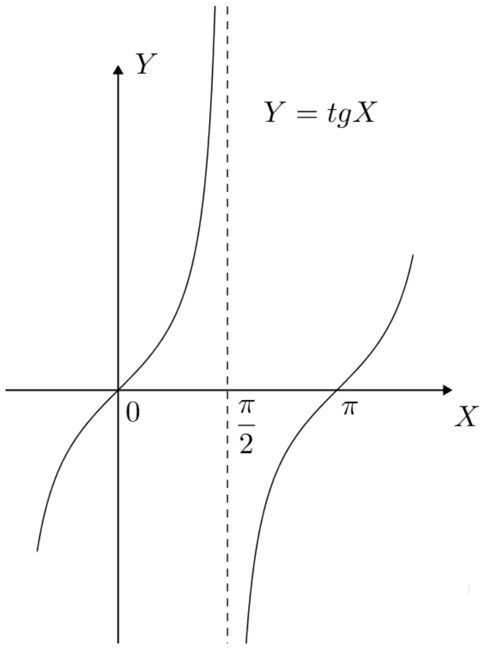


FIGURE 1.13 – Illustration de la *tangentoïde* (inspiré de [21])

1.2.12 Inversion des fonctions circulaires

Avant d'introduire les *fonctions circulaires inverses* aujourd'hui appelées *fonctions cyclométriques*, le *Traité* s'intéresse à la recherche des *arcs ayant un sinus donné* en utilisant l'équation

$$\sin x = a \quad \text{avec } |a| \leq 1.$$ [7]

Cette partie est une partie technique car elle n'introduit pas de nouvelle notion. Afin de ne pas alourdir la lecture, nous la placerons dans l'annexe B.

Les *fonctions circulaires inverses* sont introduites. Le *Traité* s'attarde plus particulièrement sur arc $\sin x$ qui désigne *les arcs dont le sinus est* x*. L'expression ainsi définie n'a de sens que si l'on a* $-1 \leq x \leq 1$ *ou* $|x| \leq 1$. La notion de *valeur principale* est définie car *pour chaque valeur* $-1 \leq x \leq 1$ *correspond une infinité de valeurs de* arc $\sin x$*. L'étude des variations du sinus montre qu'une seule de ces valeurs est comprise entre* $\frac{-\pi}{2}$ *et* $\frac{\pi}{2}$*.* Elle est appelée *valeur principale de* arc sin *et elle est notée* Arc $\sin x$. Cela permet de définir *une fonction suivant le langage moderne.*

Le livre précise ensuite que *les expressions* arc $\cos x$ $(|x| \leq 1)$, arc $\mathrm{tg}\, x$, arc $\mathrm{cotg}\, x$ *ont des significations analogues.* Pour chacune de ces expressions, les valeurs principales sont données.

7. Cette notation est étonnante car la lettre a était précédemment dévolue à la notation des arcs.

1.2.13 Relations entre les nombres trigonométriques d'un même arc

Dans cette partie, *cinq formules fondamentales*[8] sont énoncées et numérotées comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\cos^2 a + \sin^2 a &= 1 \\
\operatorname{tg} a &= \frac{\sin a}{\cos a} \\
\operatorname{cotg} a &= \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\cos a}{\sin a} \\
\text{séc}\, a &= \frac{1}{\cos a} \\
\text{coséc} &= \frac{1}{\sin a}
\end{aligned}$$

Seule la première formule, qui n'est pas une définition, est démontrée. *Les cinq relations fondamentales sont distinctes* car elles ne peuvent pas être déduites les unes des autres. *Il ne peut y avoir plus de cinq relations distinctes entre les nombres trigonométriques d'un arc.* Avec une 6e relation, le système contiendrait six équations et six inconnues. Cela entraînerait l'existence d'un nombre limité de solutions. *Il n'y aurait donc qu'un nombre limité de systèmes de nombres trigonométriques, ce qui est faux.*

Le *Traité* propose la démonstration du théorème qui dit que *si $p^2 + q^2 = 1$, les nombres p et q sont respectivement le cosinus et le sinus d'un même arc, déterminé à un multiple près de* 2π et de son corollaire qui dit que *la condition nécessaire et suffisante pour que les nombres p et q représentent le cosinus et le sinus d'un même arc, est $p^2 + q^2 = 1$.*

En modifiant la première formule fondamentale, on obtient

$$\begin{aligned}
1 + \operatorname{tg}^2 a &= \frac{1}{\cos^2 a} = \text{séc}^2\, a \\
1 + \operatorname{cotg}^2 a &= \frac{1}{\sin^2 a} = \text{coséc}^2\, a.
\end{aligned}$$

Ensuite, trois problèmes sont résolus. Chacun d'entre eux fait intervenir $\cos x$, $\sin x$ et $\operatorname{tg} x$. La valeur de l'un des trois nombres trigonométriques est connue et il faut en déduire la valeur des deux autres.

1.2.14 Formules trigonométriques

Après l'introduction de *la projection d'un vecteur*, le *Traité* présente un ensemble de formules qui concernent l'addition des arcs et la multiplication des arcs ainsi que des formules de transformation.

Addition des arcs

Le livre présente cette partie via la recherche de la solution au problème suivant : *en connaissant les nombres trigonométriques des arcs a et b, on demande de calculer ceux de $a + b$ et de $a - b$.*

8. Ces différentes formules ont déjà été vues séparément dans différentes sections. C'est ici l'occasion de les regrouper.

L'égalité

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

est démontrée de trois façons différentes. La première utilise notamment la notion de projection d'un vecteur. La seconde façon se base sur un théorème concernant les *quadrilatères convexes inscriptibles*[9] ainsi que sur les nombres trigonométriques dans les triangles rectangles. La troisième façon porte le nom de *démonstration de Gauss*. Elle se trouve dans les annexes du livre. Cette démonstration, particulièrement technique, fait intervenir l'abscisse curviligne, le théorème de Pythagore et la relation de Chasles.

En utilisant les relations entre les nombres trigonométriques de certains arcs et l'égalité qui vient d'être démontrée, le calcul de $\sin(a + b)$, $\cos(a + b)$ et $\sin(a - b)$ est réalisé. *La démonstration élémentaire des formules d'addition* propose une démonstration pour le calcul de $\sin(a + b)$ et $\sin(a - b)$. Cette démonstration concerne uniquement les angles aigus. Une généralisation est ensuite proposée pour les angles quelconques.

Les formules *de* $\operatorname{tg}(a - b)$ *et* $\operatorname{tg}(a + b)$ *en fonction de* $\operatorname{tg} a$ *et* $\operatorname{tg} b$ sont démontrées sur base de la définition de tangente et des formules démontrées précédemment.

Multiplication des arcs

Plusieurs formules permettant de solutionner le problème qui consiste à trouver les nombres trigonométriques des arcs $2a$, $3a$, ... en connaissant ceux de l'arc a, sont démontrées.

Les expressions *des nombres trigonométriques de l'arc* $2a$ en fonction de ceux de l'arc a sont obtenues à partir des formules d'addition. Ensuite, le théorème qui dit que *tous les nombres trigonométriques d'un arc s'expriment rationnellement en fonction de la tangente de l'arc moitié* est prouvé. Les formules

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \\ \cos a &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \\ \operatorname{tg} a &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \end{aligned}$$

découlent directement de ce théorème. Le *Traité* explique les raisons de l'existence de telles égalités.

Après avoir obtenu les expressions *des nombres trigonométriques de l'arc* $3a$ en fonction de ceux de l'arc a, *les formules de Simpson* sont démontrées. Leur preuve consiste à additionner membre à membre des formules provenant de l'addition des arcs.

Par remplacement de a par ma et de b par mb, les formules de Simpson peuvent être transformées en

$$\begin{aligned} \sin(m + 1)a &= 2 \sin ma \cos a - \sin(m - 1)a \\ \cos(m + 1)a &= 2 \cos ma \cos a - \cos(m - 1)a. \end{aligned}$$

Elles *permettent de calculer de proche en proche les sinus et les cosinus des arcs* $3a$, $4a, \ldots$ *connaissant* $\sin a$, $\cos a$, $\sin 2a$ *et* $\cos 2a$. Une remarque stipule que calculer $\sin ma$ et $\cos ma$ en utilisant la formule de Moivre est plus rapide.

9. Il s'agit du théorème de Ptolémée qui énonce qu'*un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés* c'est à dire qu'un *quadrilatère convexe* $ABCD$ *est inscriptible si et seulement si* $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ [24].

Formules de transformation

Dans un premier temps, deux groupes de formules sont déduites à partir des formules d'addition. Le premier groupe est constitué des formules qui *permettent de transformer en produits certaines sommes algébriques de deux nombres trigonométriques.* Dans le second groupe se trouvent des formules qui *permettent de transformer en sommes algébriques certains produits de deux nombres trigonométriques.* Ces formules sont directement déduites de celles du premier groupe. Pour les deux groupes, les formules sont aussi énoncées sous forme de règles.

Sous l'appellation d'exemples, des identités conditionnelles, qui sont des égalités qui ne sont vraies *que moyennant certaines conditions à vérifier par certains angles qui y figurent,* sont démontrées.

Division des arcs

L'objectif de cette partie est de connaître les nombres trigonométriques de l'arc $\frac{x}{2}$ *en connaissant les nombres trigonométriques d'un arc* x. Afin d'atteindre ce but, le livre propose de solutionner les trois problèmes suivants :

I Calculer $\cos\frac{x}{2}$ et $\sin\frac{x}{2}$, sachant que $\cos x = a$ et $|a| \leq 1$;
II Calculer $\cos\frac{x}{2}$ et $\sin\frac{x}{2}$, sachant que $\sin x = a$ et $|a| \leq 1$;
III Calculer $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, sachant que $\operatorname{tg} x = a$.

Pour chacune des solutions, une discussion est proposée.

1.2.15 Tables trigonométriques et leur usage

Une partie du *Traité de Trigonométrie rectiligne* s'intéresse aux tables trigonométriques et leur usage. Ces différentes informations sont développées dans l'annexe A.

1.2.16 Équations et inéquations

Cette partie n'introduit pas de nouvelles notions. Elle a pour but de présenter différentes techniques pour résoudre des équations et des inéquations. Afin de ne pas alourdir la lecture, nous développerons ces différentes techniques dans l'annexe B.1 .

Chapitre 2

Analyse des programmes

Faire la retranscription du contenu des différents programmes en notre possession pourrait rapidement s'avérer ennuyant. En effet, certains éléments étant communs à la plupart des programmes, il y aurait beaucoup de redondances. Par degré, nous avons plutôt essayé de faire une synthèse de l'ensemble des programmes sous la forme de parcours.

2.1 Programmes du deuxième degré

2.1.1 Programmes analysés

- Programme de mathématique de l'enseignement secondaire du deuxième degré de transition- 4e année (4 pér./sem.) - 1983 ;
- Programme de mathématique de l'enseignement secondaire du deuxième degré de transition (programme transitoire)- 4e année - 1994.

2.1.2 Notes historiques : le nombre d'heures

Le programme de 1994 possède une annexe qui stipule que : *pendant les années scolaires 1994-1995 et 1995-1996, le programme de mathématiques de 4° année pour l'enseignement de transition sera le programme à 4 périodes hebdomadaires (n° 7/5141).* Il s'agit en fait du programme de 1983.

2.1.3 Parcours

Voici les différents éléments du parcours de trigonométrie de ce programme :

- Cercle trigonométrique ;
- Les unités d'angles : degré, radian ;
- cos, sin, tg et cot d'un angle orienté rapporté au cercle trigonométrique ;
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$;
- Nombres trigonométriques des angles associés ;
- sin, cos, tg et cot des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° ;
- Triangles quelconques : règles des sinus, règle des cosinus traduisant le théorème de Pythagore. Il est aussi précisé qu'il faut calculer les éléments d'une figure en utilisant la calculatrice.

2.2 Programmes du troisième degré

2.2.1 Programmes analysés

- Programme de mathématique de l'enseignement secondaire du troisième degré de transition-5e année (option A à 7 h par semaine) - 1984 ;
- Programme de mathématique de l'enseignement secondaire du troisième degré de transition-5e année (6 h par semaine) - 1993 ;
- Programme de mathématique de l'enseignement secondaire du troisième degré de transition-5e année (4 h par semaine) - 1993.

2.2.2 Parcours

Nous allons différencier deux parcours. Le premier parcours concernera les programmes dont le nombre d'heures hebdomadaires est supérieur à 4h. Le second s'intéressera au programme dont le nombre d'heures par semaine est égal à 4 h par semaine. Commençons par analyser ce premier parcours qui peut être divisé en trois grandes parties.

La première partie concerne l'étude des fonctions cyclométriques et des fonctions dites circulaires en 1984 et renommées trigonométriques en 1993. Si aucun commentaire n'est fait sur la manière de les présenter en 1993, voici un résumé des commentaires qui sont faits en 1983. Les auteurs conseillent de se placer dans *un système de mesure des angles orientés.* Les fonctions circulaires sont alors définies comme les fonctions associant *à tout réel* le nombre trigonométrique *de l'angle dont ce réel est une mesure pour la graduation considérée.* De plus, *une importance particulière* est donnée *aux fonctions découlant de la graduation du cercle goniométrique obtenue par l'enroulement sur ce cercle d'une métrique.* Enfin, les professeurs sont encouragés à faire des liens avec le cours d'analyse. Notamment grâce au lien qui existe entre la graduation en radians et la propriété $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

La seconde partie de ce parcours concerne les formules suivantes :

- Formules d'addition, de multiplication ;
- Formules de division de la forme $1 + \cos a = 2\cos^2 \frac{a}{2}$ et $1 - \cos a = 2\sin^2 \frac{a}{2}$;
- Formules en $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$;
- Formules de Simpson .

Si encore cette fois-ci, le programme de 1993 ne fait aucun commentaire, le programme de 1984 attire l'attention sur les problèmes de domaine qui pourraient surgir lors de l'utilisation de ces formules.

La troisième partie de ce parcours est consacrée à la résolution d'équations trigonométriques. Le programme de 1984 désire éviter *de donner trop d'extension au chapitre des équations trigonométriques.* Dans celui-ci, la résolution d'équations se fait lors de l'étude de fonctions. Par contre, le programme de 1994 donne la forme générale des équations devant être résolues :

- Équations trigonométriques simples

$$\sin A = \sin B,\ \ldots, \sin A = \cos B,\ \ldots, \sin A = \cos B,\ \ldots, \operatorname{tg} A = \operatorname{cotg} B,\ \ldots\ ;$$

- Équations $a.\cos x + b.\sin x = c$;
- Quelques équations à résoudre par factorisation au moyen de formules précédemment définies.

De plus, ce programme préconise l'apprentissage de la résolution de quelques inéquations trigonométriques simples de la forme $\sin A < \frac{1}{2}$

Enfin, en 1984, le professeur devait évoquer avec ses élèves *la transformation de* $a.\cos x + b.\sin x$ *en* $A.\cos(x - \phi)$.

La trame du second parcours peut se résumer de la façon suivante : tout commence par l'apprentissage du maniement des formules trigonométriques et des démonstrations des identités. Ces formules sont :

- Formules d'addition ;
- Formules de l'arc double ;
- Formules de Simpson.

La connaissance des ces formules permet d'appréhender les dérivées et de résoudre les équations et les inéquations dont le programme précise d'ailleurs les différentes formes qui sont :

- $\sin ax = k$;
- $\sin x = \sin y$;
- $\sin ax > 0$ et $\sin ax < 0$.

Enfin, ces équations sont utilisées dans le cadre de l'étude des fonctions trigonométriques et de leurs dérivées.

Chapitre 3

Analyse de manuels scolaires

L'objectif de ce chapitre est de récolter des données sur l'évolution du savoir à enseigner en trigonométrie dans les classes de quatrième et de cinquième secondaire. Nous avons donc analysé les chapitres de trigonométrie d'un total de neuf livres belges. L'ensemble de ces manuels couvrent une période allant des années septante aux années nonante. Cela nous a permis de savoir quelles notions étaient vues, comment elles étaient développées et dans quel ordre.

3.1 *M41 mathématique (De Boeck)*

Ce manuel [11] date de 1976. Dans ses premières pages, il se déclare être destiné aux étudiants de *quatrième année d'études du secondaire.* Il précise même les *programmes (enseignement officiel)* auxquels il se destine :

- *7 heures/semaine (ch. 1 à 8) :* 3^e *latin-mathématiques et* 3^e *scientifique A* ;
- *6 heures/semaine (ch 1 à 8) : degré d'orientation (*4^e*, option de base).*

L'avant-propos précise comment est structuré le livre. *La matière est répartie en huit chapitres. Chaque chapitre est divisé en paragraphes repérés par deux chiffres dont le premier est celui du chapitre. Chaque paragraphe est divisé en numéros par trois chiffres dont les deux premiers sont ceux du paragraphe ; un résumé termine chaque paragraphe ; chaque résumé est repéré par les deux chiffres du paragraphe suivis de R.*

Le chapitre de trigonométrie occupe la septième place et se subdivise en paragraphes de la manière suivante :

71 *Mesure des angles* ;
72 *Nombres trigonométriques* ;
73 *Usage des tables trigonométriques* ;
74 *Formules fondamentales* ;
75 *Fonctions circulaires* ;
76 *Équations trigonométriques* ;
77 *Étude des triangles* ;
78 *Résolution des triangles.*

En tout, 88 pages de ce manuel sont consacrées à la trigonométrie dont 27 le sont à des exercices.

3.1.1 Angle

Ici, les angles sont caractérisés comme un déplacement dans le plan. Ils sont alors définis de la manière suivante : *a, b et o étant trois points de π considérons le couple de demi-droites (de même origine)* $([o, a, [o, b)$ *: on appelle angle $\widehat{aob}$ l'ensemble des couples de demi-droites (de même origine)* $([o', a', [o', b')$ *tel qu'il existe un déplacement, dans π, qui applique $[o', a'$ sur $[o, a$ et $[o', b'$ sur $[o, b$.* Voici la figure 3.1 qui est proposée par le manuel afin d'illustrer cette construction mathématique.

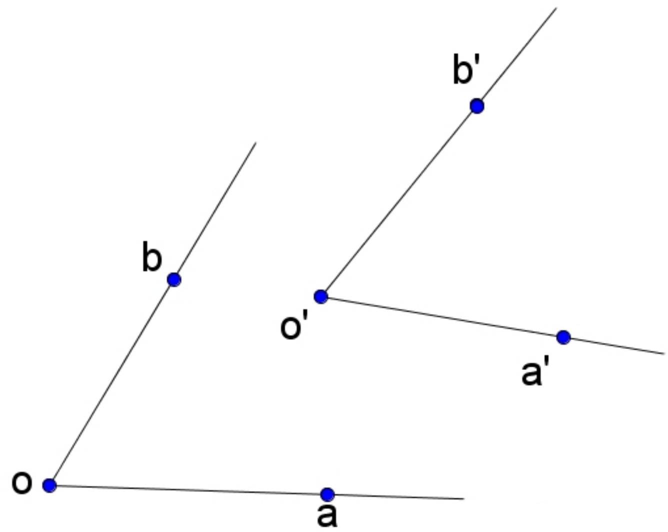


FIGURE 3.1 – Illustration du déplacement des angles (inspiré de [11])

Dans la suite, ce sont les notions de sommet, de côté d'origine, de côté extrémité et d'angle orienté qui sont développées. La somme de deux angles est, quant elle, expliquée à partir de l'affirmation suivante,
Ssi une rotation de centre o applique $[o, a$ sur $[o, b$, alors $\widehat{aob}$ est l'angle de cette rotation. « a pour angle » détermine une bijection de l'ensemble des rotations de centre o dans l'ensemble $\mathcal{A}$ des angles.
Cette affirmation n'est pas tout-à-fait rigoureuse car elle commence par un « si et seulement si » et possède aussi un alors.

Il est aussi précisé que *l'ensemble des angles muni de l'addition est un groupe commutatif.* Le double et la moitié des angles sont mentionnés. Enfin les angles particuliers comme les angles plats et les angles droits sont définis à partir des droites perpendiculaires.

Toutes ces notions sont considérées par les auteurs comme étant un rappel de l'année précédente.

3.1.2 Mesure d'angle, degré et radian

La mesure d'un angle est illustrée par la figure 3.2. Il montre un cercle C de centre o et un angle α défini comme $\widehat{aob}$ où a et b sont deux points du cercle. Le cercle est muni de la tangente T en a. Les auteurs commentent les schémas de la façon suivante : *Enroulons T sur le cercle C comme l'indique la figure : chaque point de T vient se placer en un point de C et en chaque point de C viennent se placer une infinité de points de T.*

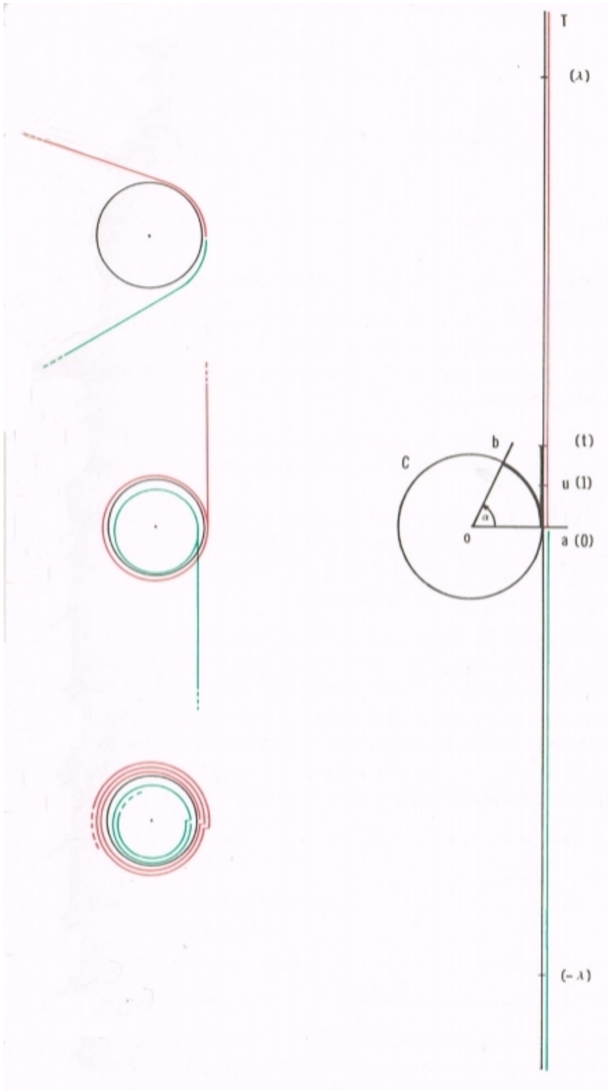


FIGURE 3.2 – Illustration de la mesure d'un angle (extrait de [11])

En observant la demi-droite rouge qui *recouvre le cercle*, le manuel définit alors les nombres multiples de λ. Il s'agit de *l'abscisse du point de T qui vient en a ; après deux tours le point d'abscisse 2λ vient également en a et ainsi de suite.* C'est à partir de ces valeurs que sont définies les mesures d'angles et en particulier la mesure principale. Il s'agit en fait, d'une façon intuitive de définir *une surjection entre les nombres réels et les angles.* Par la suite, c'est la somme des angles qui est déterminée ainsi que l'orientation positive d'un angle.

Ce manuel fait un parallèle entre les deux systèmes d'unités que sont le degré et le radian. Le début de cette comparaison se fait en reprenant les notations du schéma précédent. La caractéristique du *système degré* est que $\lambda = 360$. Le *système radian* se caractérise lui par $\lambda = 2\pi$. Dans la suite, la détermination principale, la simplification d'écriture ainsi que la formule de passage d'un jeu à l'autre sont explicitées. De plus une remarque mentionne les sous-unités du degré de la façon suivante

$$minute(')(1^{\circ} = 60') \text{ et } seconde('')(1' = 60'').$$

Un autre système de mesure qui est le grade est défini comme la *centième partie de l'angle droit.*

3.1.3 Cercle trigonométrique

Avant de définir le cercle trigonométrique proprement dit, les auteurs donnent les caractéristiques du plan dans lequel ils travaillent. Il s'agit du *plan* π qui est *muni d'une unité métrique et* qui *est orienté. Et tout repère* (o, u_x, u_y) *est orthonormé et tel que l'angle* $\widehat{u_x o u_y}$ *est l'angle droit positif.*

Le cercle trigonométrique est alors défini comme *le cercle* U *de centre* o *et de rayon* 1.

La bijection

$$\alpha \to u_x$$

est définie comme allant *de l'ensemble des angles dans l'ensemble des points du cercle trigonométrique.* u_x *est le point-image de* α.

3.1.4 Nombres trigonométriques

Dans ce livre, le couple sinus et cosinus est apparenté à des coordonnées comme le laissent penser les définitions suivantes :

- $\cos\alpha$ *est l'abscisse du point-image de* α *sur le cercle trigonométrique* ;
- $\sin\alpha$ *est l'ordonnée du point-image de* α *sur le cercle trigonométrique.*

Ensuite, en observant la figure 3.3, le signe du sinus et du cosinus sont déterminés en fonction de l'appartenance de u_α à l'un des quatre quadrants. Par induction à partir de ce signe, la bornitude du sinus et cosinus est déterminée. C'est sur cette bornitude que les auteurs se basent pour déterminer l'égalité fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. La tangente d'un angle est présentée comme le rapport du sinus sur le cosinus de cet angle. La cotangente est définie comme $\text{tg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Cela a comme conséquence la formule suivante $\text{tg}\,\alpha . \text{cotg}\,\alpha = 1$.

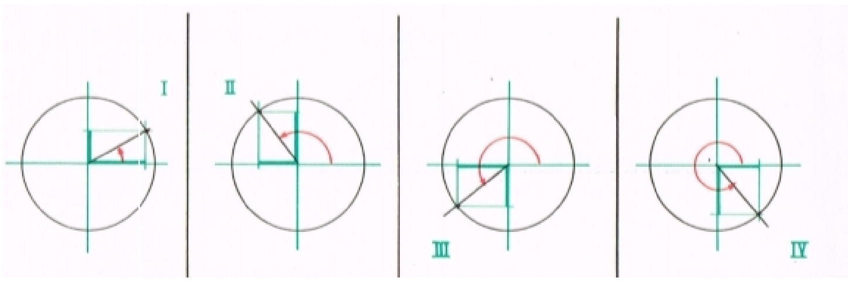


FIGURE 3.3 – Illustration des quatre quadrants (extrait de [11])

Par la suite, quatre paragraphes sont consacrés aux angles associés. Ces paragraphes définissent les angles supplémentaires, les angles opposés, les angles antisupplémentaires et les angles complémentaires et donnent les propriétés des nombres trigonométriques de ceux-ci. C'est à partir de ces propriétés que la réduction au premier quadrant est réalisée : c'est-à-dire trouver les nombres trigonométriques d'un angle via les nombres trigonométriques de l'angle aigu correspondant. Pour effectuer cette réduction au premier quadrant, les auteurs proposent *préalablement de se ramener à une détermination comprise entre* 0° *et* 360°. Ensuite trois cas de figure sont envisagés en fonction de l'appartenance de l'angle à l'un des quadrants différents du premier.

Après, en utilisant les propriétés des angles complémentaires ainsi que l'égalité fondamentale, les auteurs déterminent la valeur du sinus et du cosinus de 45°. Cette détermination est accompagnée du schéma présent sur la figure 3.4. Les valeurs du sinus et du cosinus de 30° et 60° sont trouvées grâce à l'égalité fondamentale et au fait qu'un triangle équilatéral a trois angles de 60°. Un triangle équilatéral est placé dans un cercle. Comme sur la figure 3.4, ses sommets sont l'origine du cercle trigonométrique, un point-image dans le premier quadrant et un point-image dans le dernier quadrant.

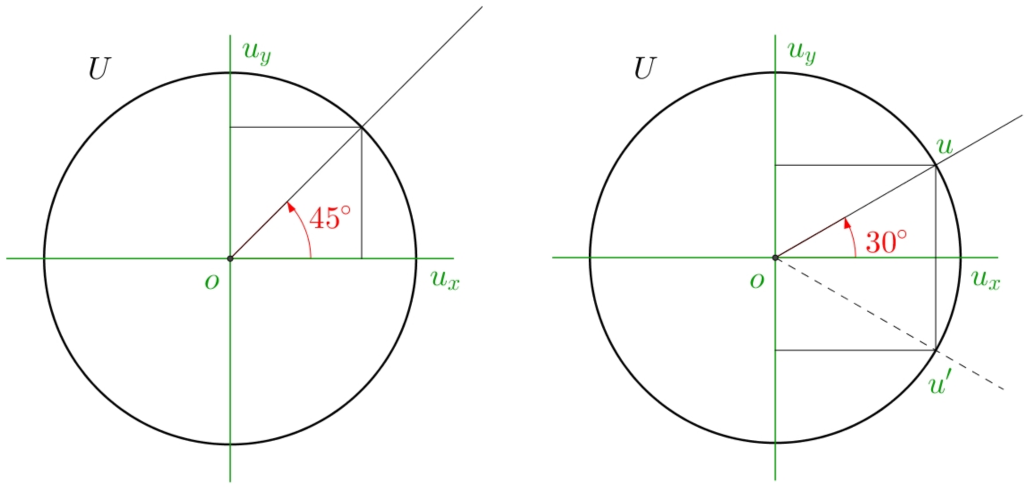


FIGURE 3.4 – Mesure d'un angle orienté (inspiré de [11])

Directement après la détermination des nombres trigonométriques des angles de $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ un paragraphe est intitulé *compléments de géométrie analytique*. Dans celui-ci, un raisonnement est construit pour aboutir à la proposition que $\operatorname{tg}\alpha$ *est le coefficient angulaire de la droite qui passe par l'origine* o *des axes et par le point-image* u_x *de l'angle* α*, sur le cercle trigonométrique* U. Une *interprétation géométrique de la* $\operatorname{tg}\alpha$ *et de la* $\operatorname{cotg}\alpha$ est aussi proposée. La fin de ce paragraphe traite de *l'équation normale d'une droite* D. Une équation de droite

$$ax + by + c = 0 \tag{3.1.1}$$

est dite normale si $a^2 + b^2 = 1$. Ce type de droite est illustré par le schéma sur la figure 3.5
Les nombres trigonométriques permettent de déterminer une équation équivalente à (3.1.1) de la forme

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - s = 0$$

où α est *la perpendiculaire abaissée de* o *sur* D*, soit* h *le pied de cette perpendiculaire et* α *l'angle* $\widehat{u_x oh}$.
Notons qu'une explication sur l'usage des tables trigonométriques est aussi dispensée.

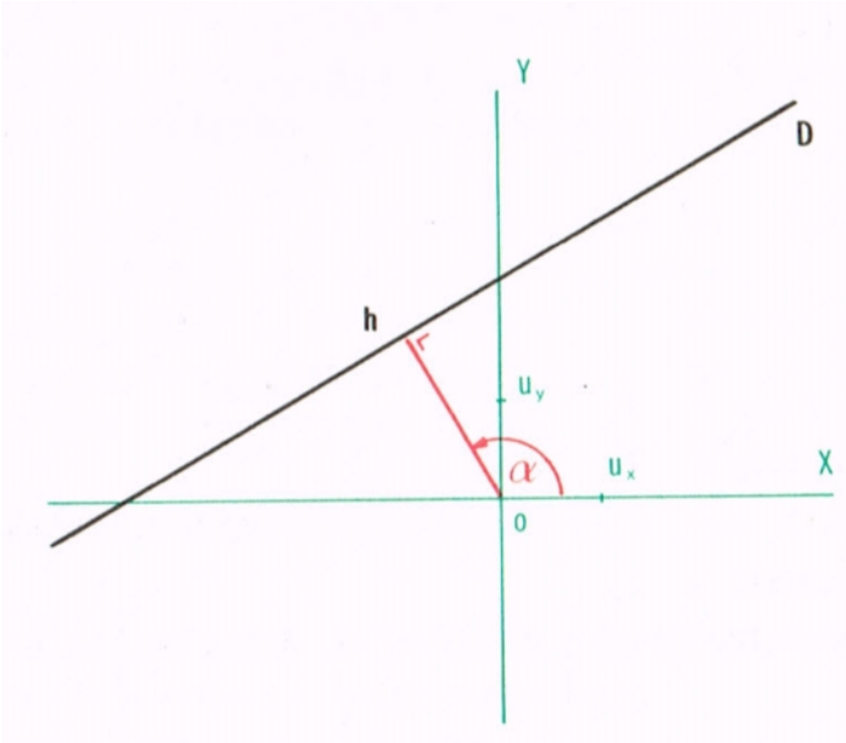


FIGURE 3.5 – Illustration d'une droite normale (extrait de [11])

3.1.5 Calcul trigonométrique

Après une mise au point sur le produit scalaire dans le paragraphe intitulé *expression du produit scalaire de deux vecteurs en fonction du cosinus de l'angle de ces vecteurs,* le manuel propose une série de formules trigonométriques. Elles seront toutes énoncées et démontrées.

Les premières formules sont les formules d'addition. Elles sont démontrées à partir du produit scalaire. Les autres démonstrations ne seront basées que sur la manipulation de formules déjà vues.

Vient ensuite le tour des *formules de multiplication par 2.* En combinant les formules d'addition et de multiplication et en remplaçant le a par $\frac{a}{2}$ les auteurs aboutissent à, par exemple,

$$\forall\ k \in \mathbb{Z}\ :\ \sin(30^\circ + k360^\circ) = 2\sin\frac{30^\circ + k360^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ + k360^\circ}{2}.$$

Par la suite, les *expressions de* $\sin a$, $\cos a$ *et* $\operatorname{tg} a$ *en fonction* $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ sont démontrées.

Enfin les dernières formules présentées dans cette partie sont appelées *formules de factorisation.* De nos jours, elles sont enseignées sous le nom de formules de Simpson.

3.1.6 Fonctions circulaires

Dans ce chapitre, ce sont les fonctions circulaires qui seront étudiées. La fonction sinus est alors définie comme

$$sin\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ x \mapsto \sin x.$$

Les définitions des autres fonctions circulaires ont le même domaine de définition ainsi que la même image.

La première fonction étudiée est la *fonction sin (fonction sinusoïdale)*. Il est dit qu'il s'agit d'une application dont le domaine de définition est $\mathbb{R}$. Une explication sur les deux moyens de construire le graphique de cette fonction est donnée. Le premier moyen se fait *à partir d'une table en radians des sinus*. Le second moyen est *de repartir de la définition géométrique du sinus : on « déroule » le cercle trigonométrique sur X.*

Ensuite, différentes propriétés de cette fonction sont citées :

1. *L'image de la fonction* sin *dans $\mathbb{R}$ est l'intervalle* $[-1, 1]$. Le sinus est *une surjection de $\mathbb{R}$ dans* $[-1, 1]$. Mais en réduisant le domaine de définition de la façon suivante :

$$sin \ : \ \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \ : \ x \mapsto \sin x.$$

   La fonction devient une bijection ;
2. *La fonction sinusoïdale est périodique, de période* 2π. Cela vient de

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \forall k \in \ \mathbb{Z} \ : \ \sin(x + 2k\pi) = \sin x;$$

3. *La fonction* sin *est croissante dans les intervalles*

$$\cdots \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right] \ , \ \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right] \ , \ \cdots$$

   et décroissante dans les intervalles

$$\cdots \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ , \ \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \ , \ \left[\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\right] \ , \ \cdots;$$

4. *La fonction est impaire.* Cela est, ici, justifié par le fait qu'il y a une symétrie par rapport à l'origine et que

$$\forall \ x \ \in \mathbb{R} \ : \ \sin(-x) = -\sin(x).$$

La seconde fonction analysée est *la fonction cos*. Son graphique est obtenu par *une translation de $\frac{-\pi}{2}$* selon l'axe x. Cela est justifié grâce à l'identité

$$\forall \ x \in \mathbb{R} \ \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Par la suite, les propriétés de cette fonction sont données :

1. Distinction entre surjection et bijection ;
2. Périodicité de période 2π ;
3. Croissance de la fonction sur certains intervalles et décroissance sur d'autres ;
4. Parité de la fonction avec la présence d'une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées.

La troisième fonction à être étudiée est *la fonction tg*. Elle *est définie pour tout x réel sauf pour les valeurs* $\frac{\pi}{2} + k\pi$ *(pour tout* $k \in \mathbb{Z}$*)*. Les auteurs suggèrent deux méthodes pour construire le graphique de cette fonction. La première est de la *construire point par point à partir d'une table en radians des tangentes.* La seconde serait de se baser sur les *compléments de géométrie analytique* et, en particulier, sur *l'interprétation géométrique de la* $\operatorname{tg}\alpha$. La description des propriétés de cette fonction est proche de celles qui ont été réalisées pour le sinus et le cosinus. L'existence d'une *asymptote verticale pour* $x = \frac{\pi}{2}$ est expliquée de la façon suivante :

Pour $\frac{\pi}{2}$*, la fonction n'est pas définie ; remarquons que :*

- *Pour les valeurs de x voisines de $\frac{\pi}{2}$ et inférieures à $\frac{\pi}{2}$,* $\operatorname{tg} x$ *a des valeurs positives très grandes en valeur absolue ;*
- *Pour les valeurs de x voisines de $\frac{\pi}{2}$ et supérieures à $\frac{\pi}{2}$,* $\operatorname{tg} x$ *a des valeurs négatives très grandes en valeur absolue.*

D'autres propriétés sont citées :

1. $\operatorname{tg}\ :\ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ \rightarrow\ \mathbb{R} : x \mapsto \operatorname{tg} x$ *est une bijection* ;
2. Comme
$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \quad \operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg}(x),$$
   la fonction est périodique de période π ;
3. La fonction est croissante ;
4. La fonction est impaire. Cela est, ici, justifié par la présence d'une symétrie par rapport à l'origine et par l'identité suivante
$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x).$$

La dernière fonction étudiée est la fonction cotangente. Elle bénéficie d'une analyse plus courte car selon les auteurs, *on peut ramener l'étude de la fonction* cotg *à celle de la fonction* tg *en se rappelant que* $\operatorname{cotg} x$ *est l'inverse de* $\operatorname{tg} x$.

3.1.7 Équations

La partie consacrée aux *équations trigonométriques* est une partie technique, elle est donc placée dans l'annexe B.2.

3.1.8 Étude des triangles

Cette dernière partie s'intéresse à la construction et à la résolution des triangles rectangles et des triangles quelconques.

Dans un premier temps, un ensemble de formules est donné pour les triangles rectangles. Il s'agit de la formule de Pythagore et des rapports définissant le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente. Ensuite, pour les triangles quelconques, le manuel fournit des formules comme :

- La somme des angles d'un triangle vaut 180° ;
- La généralisation du théorème de Pythagore ;
- La règle des sinus (*dans tout triangle, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés*) ;

– Trois formules liant le périmètre P, A la longueur du segment $[b, c]$, B la longueur du segment $[a, c]$ et C la longueur du segment $[b, a]$ avec les fonctions trigonométriques de l'angle $\hat{a}$ défini par les demi-droites $[a, b$ et $[a, c$:

$$\begin{aligned}
\sin \frac{\hat{a}}{2} &= \sqrt{\frac{(P-B)(P-C)}{BC}} \\
\cos \frac{\hat{a}}{2} &= \sqrt{\frac{P(P-A)}{BC}} \\
\operatorname{tg} \frac{\hat{a}}{2} &= \sqrt{\frac{(P-B)(P-C)}{P(P-A)}}.
\end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, les auteurs exposent des méthodes pour construire et résoudre des triangles. L'objectif est, à partir de deux données pour les triangles rectangles et de trois données pour les triangles quelconques, de déterminer les données manquantes.

Pour la construction des triangles rectangles, trois cas de figure sont distingués :

1. *Les deux côtés de l'angle droit* sont donnés ;
2. *Un côté de l'angle droit et un angle aigu* sont donnés ;
3. *Les deux angles aigus sont donnés.*

Pour ce qui est de la résolution des triangles rectangles, quatre exemples sont donnés. Une des données est toujours la longueur d'un côté tandis que l'autre peut être, soit un côté, soit un angle. Vient le tour de la construction des triangles quelconques. Le manuel envisage alors quatre cas de figure qui sont :

1. *Trois côtés* donnés ;
2. *Deux côtés et un angle* donnés ;
3. *Un côté et les angles adjacents à ce côté* donnés ;
4. *Trois angles* donnés.

En ce qui concerne la résolution des triangles quelconques, plusieurs exemples sont proposés. Cette fois-ci, les données vont toujours par trois. Elles se composent soit de la longueur des trois côtés ou d'un mélange de longueurs de côtés et d'amplitudes d'angles.

3.2 *Mathématique* $2B$ *(De Boeck)*

Mathématique $2B$ [2] date de 1977. Il est destiné aux classes de cinquième secondaire latin-sciences et scientifique B. Dans l'avant-propos, les auteurs précisent qu'ils ont *rassemblé les matières figurant dans les anciens manuels* $2B$ *et* $2C$. Ce livre est articulé autour de trois thèmes qui sont le calcul, la trigonométrie rectiligne et l'analyse. Il compte douze chapitres. Le sixième est consacré à la trigonométrie et il se subdivise en neuf sections dont les intitulés sont :

1. Rappels ;
2. Définitions des fonctions circulaires ;
3. Réduction au premier quadrant ;
4. Recherche des valeurs naturelles des nombres trigonométriques d'un angle ;
5. Formules d'addition ;
6. Formules de duplication et de Carnot ;
7. Formules de Simpson ;
8. Triangles ;
9. Équations trigonométriques ;

3.2.1 Cercle trigonométrique

La notion de cercle trigonométrique est considérée comme un rappel. Dans cette partie, trois définitions sont données. La première est celle du *cercle trigonométrique*. Ensuite, après avoir muni le plan π_0 *d'une base orthonormée* $\{\overrightarrow{e}, \overrightarrow{u}\}$, le cercle trigonométrique est défini comme *l'ensemble*

$$C(\overrightarrow{0}, 1) = \{\overrightarrow{x} \in \pi_0 | \|\overrightarrow{x}\| = 1\}.$$

Enfin, *le cercle trigonométrique pointé* est défini comme *le cercle trigonométrique* $C(\overrightarrow{0}, 1)$ *dans lequel un point e est fixé. Le vecteur* $\overrightarrow{e}$ *est nommé « origine » du cercle trigonométrique.*Ce vecteur correspond à l'axe des abscisses. L'action d'*orienter le cercle trigonométrique* est aussi définie. Il s'agit d'*orienter un sens positif. La tradition veut que l'on choisisse le sens antihorloger comme sens positif.* Tout cela est illustré par la figure 3.6.

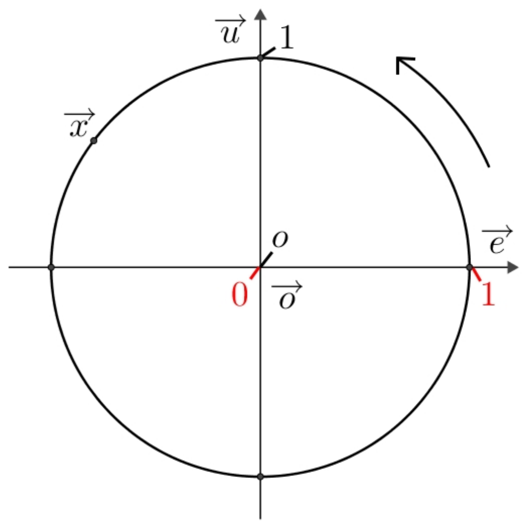


FIGURE 3.6 – Cercle trigonométrique (inspiré de [2])

A partir de cela *la bijection de l'ensemble A des angles sur le cercle trigonométrique pointé et orienté*

$$f \ : \ A \ \rightarrow \ C_e \ : \ \hat{a} \ \rightarrow \ \overrightarrow{x} \text{ tel que } \widehat{eox} = \hat{a}$$

est définie.

3.2.2 Mesure d'angle, degré et radian

La mesure d'un angle est définie à partir de la notion d'*abscisse curviligne en base n d'un vecteur de* C_e. Le développement du concept d'*abscisse curviligne* est basé sur *l'axiome de la graduation de* C_e dont l'énoncé est

Si l'on définit sur C_e *un repère* $(0,1)$ *tel que :*

- 0 *repère* $\overrightarrow{e}$ *;*
- 1 *repère un vecteur de* C_e *tel que* $2n$ *(n fixé dans* R_0*) repère aussi* $\overrightarrow{e}$*.*

alors chaque vecteur de C_e *est repéré par une infinité de nombres réels dont l'ensemble est* $\{m + k2n \mid 0 \leq m < 2n, m \ fix\acute{e} \ dans \ I\!R \ et \ k \in Z\!\!Z\}$.

Ensuite l'*abscisse curviligne en base n d'un vecteur de* C_e est définie comme *l'ensemble* $\{m + k2n \mid 0 \leq m < 2n, m \ fix\acute{e} \ dans \ I\!R \ et \ k \in Z\!\!Z\}$ *formé des réels qui repèrent ce vecteur de* C_e *dans le repère métrique* $(0,1)$ *choisi sur* C_e.

Finalement, le manuel définit le radian et le degré à partir de la proposition suivante. Cette proposition est d'ailleurs accompagnée de la figure 3.7.

$$\forall \hat{a} \in A \ : \ si \quad \begin{cases} \overrightarrow{x} \textit{ est l'image } \hat{a} \textit{ par } f \ : \ A \ \rightarrow \ C_e, \\ \textit{l'abscisse curviligne de } \overrightarrow{e} \textit{ en base } \pi \textit{ est } \{k \ 2\pi \ |k \in Z\!\!Z\}, \\ \textit{l'abscisse curviligne de } \overrightarrow{e} \textit{ en base } 180 \textit{ est } \{k \ 360 \ |k \in Z\!\!Z\}, \end{cases}$$

Alors
- *la mesure en radians de* $\hat{a}$ *est égale à l'abscisse curviligne en base* π *de* $\overrightarrow{x}$,
- *la mesure en degrés de* $\hat{a}$ *est égale à l'abscisse curviligne en base* 180 *de* $\overrightarrow{x}$.

De plus une définition de *la détermination principale* pour chacune des deux mesures est proposée.

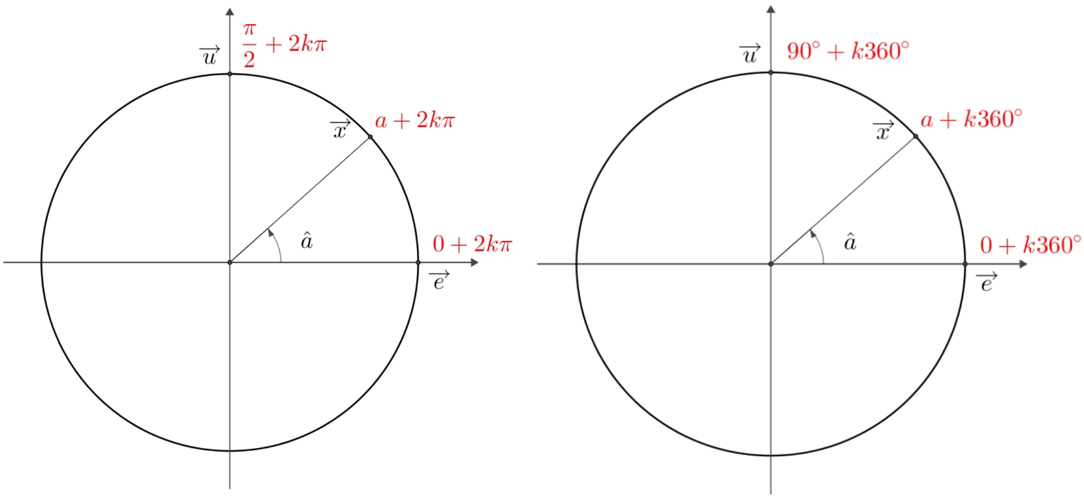


FIGURE 3.7 – Mesure d'un angle (inspiré de [2])

3.2.3 Nombres trigonométriques

Dans un premier temps, le manuel définit *le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle* :

- *Si* $\overrightarrow{m} \in C_e$, $\hat{a} = \widehat{eom}$,

  $$alors \begin{cases} \cos\hat{a} & = \cos\widehat{eom} & = abs_{oe}\ p_{oe}(\overrightarrow{m}) \\ \sin\hat{a} & = \sin\widehat{eom} & = abs_{ou}\ p_{ou}(\overrightarrow{m}); \end{cases}$$

- Si $\hat{a} \notin \left\{\frac{-\hat{\pi}}{2}, \frac{\hat{\pi}}{2}\right\}$,
  $alors\ \operatorname{tg}\hat{a} = \frac{\sin\hat{a}}{\cos\hat{a}}$;

- Si $\hat{a} \notin \left\{\hat{0}, \hat{\pi}\right\}$,
  $alors\ \operatorname{cotg}\hat{a} = \frac{\cos\hat{a}}{\sin\hat{a}}$.

Ces définitions sont accompagnées du schéma de la figure 3.8.

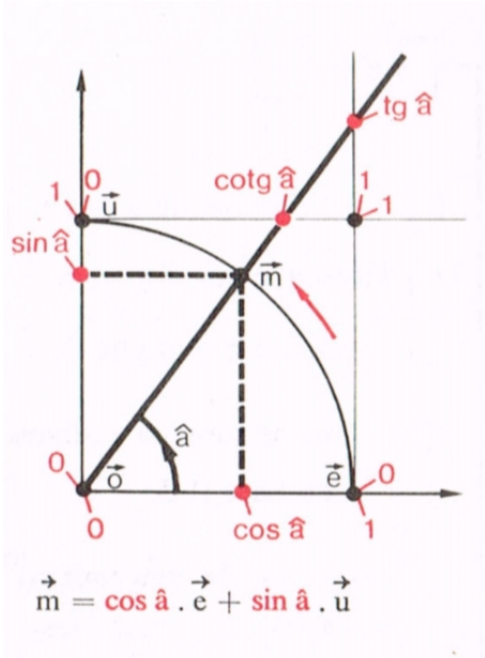


FIGURE 3.8 – Schéma accompagnant les définitions de sinus et de cosinus (extrait de [2])

Attardons-nous un peu sur les notations $abs_{oe}p_{oe}(\overrightarrow{m})$ et $abs_{ou}\ p_{ou}(\overrightarrow{m})$. La première notation signifie que nous considérons l'abscisse selon *oe* de la projection orthogonale de $\overrightarrow{m}$ sur le segment *oe*. La seconde indique que c'est l'abscisse selon *ou* de la projection orthogonale de $\overrightarrow{m}$ sur le segment *ou* qui est prise. Le couple sinus et cosinus est donc vu comme des coordonnées.
Ensuite, les formules fondamentales :

- $\forall\ \hat{a} \in A\ \ \cos^2 a + \sin^2 a = 1;$
- $\forall \hat{a} \in A \setminus \left\{\frac{-\hat{\pi}}{2}, \frac{\hat{\pi}}{2}\right\}\quad 1 + \operatorname{tg}^2 \hat{a} = \frac{1}{\cos^2 \hat{a}};$
- $\forall \hat{a} \in A \setminus \left\{-\hat{\pi}, \hat{pi}\right\}\quad 1 + \operatorname{cotg}^2 \hat{a} = \frac{1}{\sin^2 \hat{a}};$

sont énoncées.

De plus un tableau avec les différents nombres trigonométriques des angles de $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ et 90° est présenté. A cela s'ajoute aussi une remarque sur *la détermination principale* et *le signe des nombres trigonométriques* selon le quadrant.

Enfin, la réduction au premier quadrant d'un angle prend une place importante dans ce livre. Cette réduction consiste à *déterminer les nombres trigonométriques de cet angle en fonction des nombres trigonométriques d'un angle aigu.* Cela est en effet nécessaire car *les tables et les règles à calculer*[1] *ne donnent que les nombres trigonométriques d'angles aigus.*

1. Les règles à calculer sont évoquées dans l'annexe D.

C'est dans le but de pouvoir réaliser la réduction au premier quadrant que sont définies les propriétés des différents nombres trigonométriques pour les angles associés suivants :

- Les angles égaux ;
- Les angles opposés ;
- Les angles complémentaires ;
- Les angles dont la somme est de 360° ;
- Les angles supplémentaires ;
- Les angles anti-supplémentaires.

La *pratique de la réduction* est ensuite expliquée. En utilisant les propriétés précédentes, les auteurs proposent plusieurs cas de figure dépendant de α qui est la détermination de la mesure de l'angle :

1. $|\alpha| > 360^\circ$;
2. $\alpha < 0$;
3. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;
4. $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;
5. $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Ensuite, les auteurs expliquent trois méthodes de *recherche des valeurs naturelles des nombres trigonométriques d'un angle.* Ces trois moyens sont *l'emploi des tables de valeurs naturelles, l'emploi de la règle à calcul* et *l'emploi de la machine à calculer.*

3.2.4 Calcul trigonométrique

Une série de formules mettant en jeu différentes fonctions trigonométriques sont par la suite démontrées.

Les premières formules considérées sont *les formules d'addition.* La démonstration de

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

se base sur le produit scalaire. Par contre, les autres sont démontrées par la manipulation de formules. Ensuite, ce sont les *formules de duplication, de Carnot et de Simpson* qui sont démontrées.

3.2.5 Étude des triangles

L'objectif de cette partie est de construire des triangles. Selon les auteurs, *pour construire, il suffit de connaitre trois de ses éléments dont un, au moins, est un côté. La connaissance de trois tels éléments permet donc de déterminer les trois autres.*

Avant de commencer la construction, plusieurs rappels de quatrième année sont dispensés. D'un côté il y a des rappels sur les propriétés des triangles rectangles comme les rapports qui définissent le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente. D'un autre côté, il y a des rappels sur les formules valables pour les triangles quelconques comme *l'égalité de Pythagore généralisée et l'égalité aux cosinus - égalité aux sinus.*

Des façons de résoudre des triangles sont présentées pour les triplets suivants de données :

1. *Un côté et deux angles ;*
2. *Deux côtés et l'angle compris ;*
3. *Deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux ;*
4. *Trois côtés.*

3.2.6 Équations

Cette partie particulièrement technique est placée dans l'annexe B.3 afin de ne pas alourdir la lecture.

3.3 *Mathématisons 46 (Manuel) (De Boeck)*

Ce livre [1] datant de 1983 est destiné aux élèves de l'enseignement de transition qui sont en quatrième année et qui suivent six heures de mathématiques par semaine. Il s'agit de la deuxième année du second cycle, qui est appelé cycle d'observation.
Il est constitué de sept chapitres dont le dernier porte sur la trigonométrie et le produit scalaire. Le chapitre de trigonométrie se subdivise en dix points qui sont intitulés :

1. Angles ;
2. Mesure des angles ;
3. Nombres trigonométriques ;
4. Produit scalaire ;
5. Relation métrique ;
6. Cercle ;
7. Triangle et polygone ;
8. Algorithme ;
9. Exercices de révision.

3.3.1 Angle

Dans un premier temps, *l'angle est déterminé par une paire de demi-droites de même origine.* Ensuite, *l'angle est déterminé par un couple de demi-droites de même origine.* Pour les auteurs, le mot couple *ajoute une notion de sens* à la définition. Nous retrouvons ainsi le *sens horloger qui est dit positif* et le *sens antihorloger qui est dit négatif.*

De plus, une distinction est faite entre un angle non-orienté et un angle orienté. Le premier a deux côtés et un sommet. Le second possède un côté qui est considéré comme origine et un autre qui est pris comme extrémité.

Ensuite, deux critères sont aussi mis en place. L'un pour décider si *deux angles non-orientés sont dits adjacents* ou pas. Plusieurs cas sont envisagés.

- Il suffit que ces deux angles aient le même sommet.
- Il suffit que ces deux angles aient un côté commun.
- Il suffit que ces deux angles soient situés de part et d'autre du côté commun.

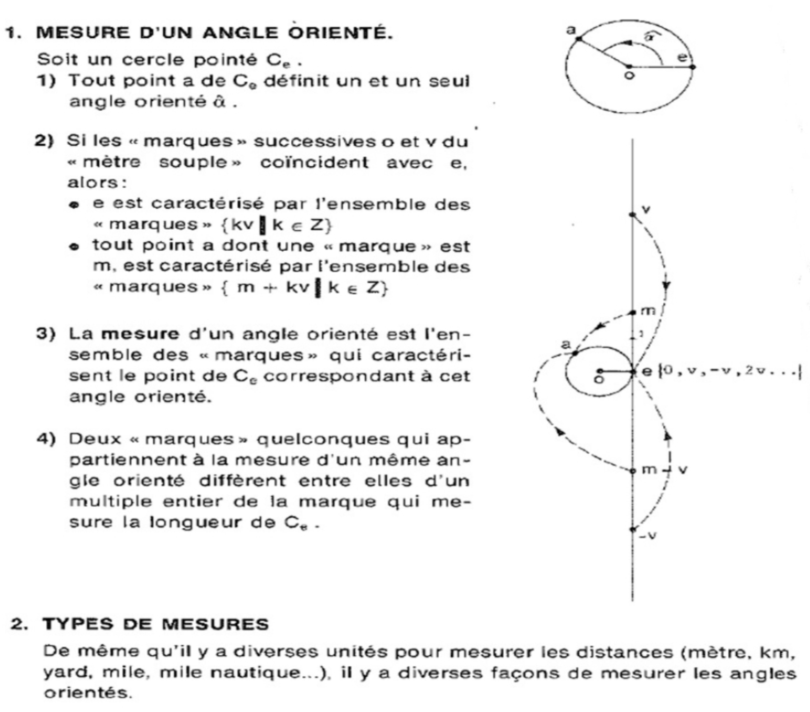
L'autre pour savoir si *deux angles orientés sont dits adjacents* ou pas. Différents cas de figure sont envisagés.

- Il suffit que les deux angles aient le même sommet.
- Il suffit alors que l'extrémité de l'un soit origine de l'autre.

Finalement, *l'angle nul* et *l'angle plat* sont définis.

3.3.2 Mesure d'angle, degré et radian

Le cercle pointé et l'ensemble des angles orientés sont d'abord définis. La notion de *marque* permet d'introduire et de définir la *mesure d'un angle orienté* ainsi que différentes unités de la mesure d'un angle qui sont le degré, le radian mais aussi le millième ou le grade. La figure 3.9 montre comment les auteurs introduisent et définissent cette notion de *marque.*



1. MESURE D'UN ANGLE ORIENTÉ.

Soit un cercle pointé C_e.

1) Tout point a de C_e définit un et un seul angle orienté $\hat{a}$.

2) Si les « marques » successives o et v du « mètre souple » coïncident avec e, alors :

- e est caractérisé par l'ensemble des « marques » $\{kv \mid k \in Z\}$
- tout point a dont une « marque » est m, est caractérisé par l'ensemble des « marques » $\{m + kv \mid k \in Z\}$

3) La **mesure** d'un angle orienté est l'ensemble des « marques » qui caractérisent le point de C_e correspondant à cet angle orienté.

4) Deux « marques » quelconques qui appartiennent à la mesure d'un même angle orienté diffèrent entre elles d'un multiple entier de la marque qui mesure la longueur de C_e.

2. TYPES DE MESURES

De même qu'il y a diverses unités pour mesurer les distances (mètre, km, yard, mile, mile nautique...), il y a diverses façons de mesurer les angles orientés.

Figure 3.9 – Mesure d'un angle orienté (extrait de [1])

Les méthodes pour *additionner deux angles orientés* et *deux angles non-orientés* sont aussi décrites.

3.3.3 Cercle trigonométrique

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, le cercle trigonométrique qui est illustré par la figure 3.10, est défini comme *un cercle pointé*

1. *Centré à l'origine des axes ;*
2. *De rayon 1 ;*
3. *D'origine e, point de l'intersection du cercle avec l'axe X.*

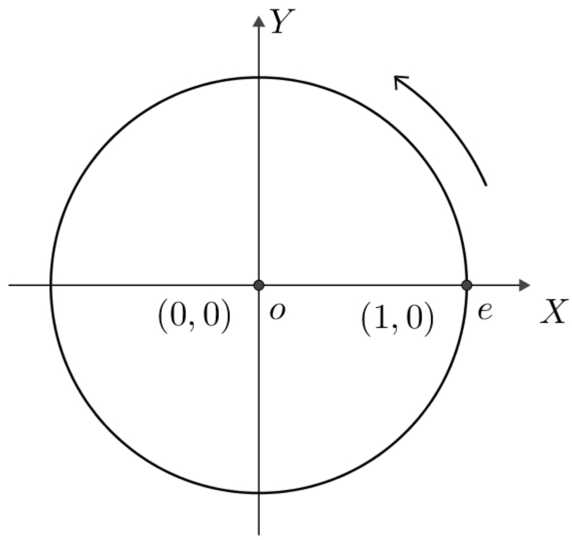


FIGURE 3.10 – Cercle trigonométrique (inspiré de [1])

Les quatre quadrants sont illustrés par la figure 3.11 et 3.12. Ils sont définis en termes de quart de cercle.

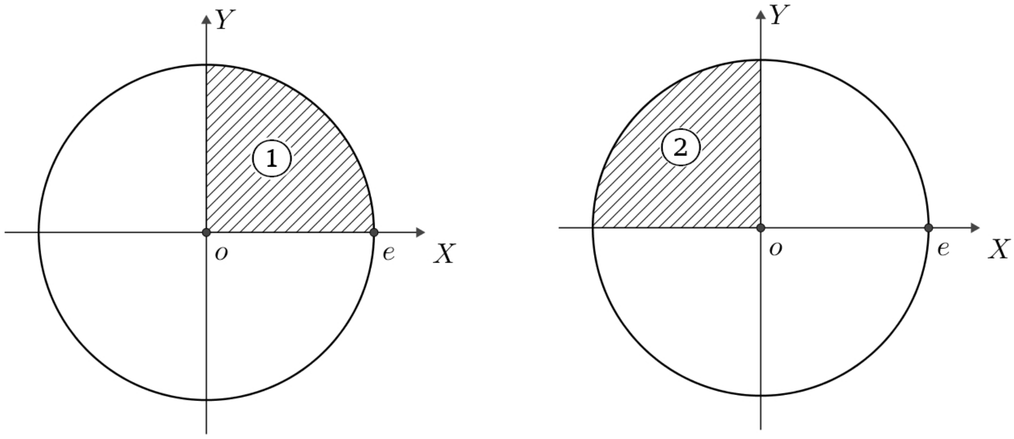


FIGURE 3.11 – Premier et deuxième quadrant (inspiré de [1])

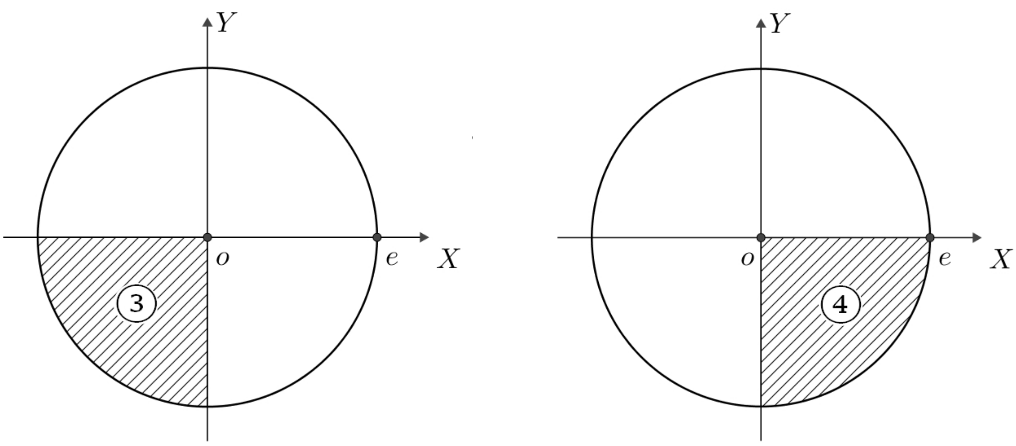


FIGURE 3.12 – Troisième et quatrième quadrant (inspiré de [1])

3.3.4 Nombres trigonométriques

Dans ce manuel, le couple sinus et cosinus est vu comme un couple de coordonnées : *on appelle cosinus de l'angle orienté α, l'abscisse du point a représentant α sur le cercle trigonométrique.* Le sinus est relié à l'ordonnée. La représentation 3.13 illustre ces définitions.

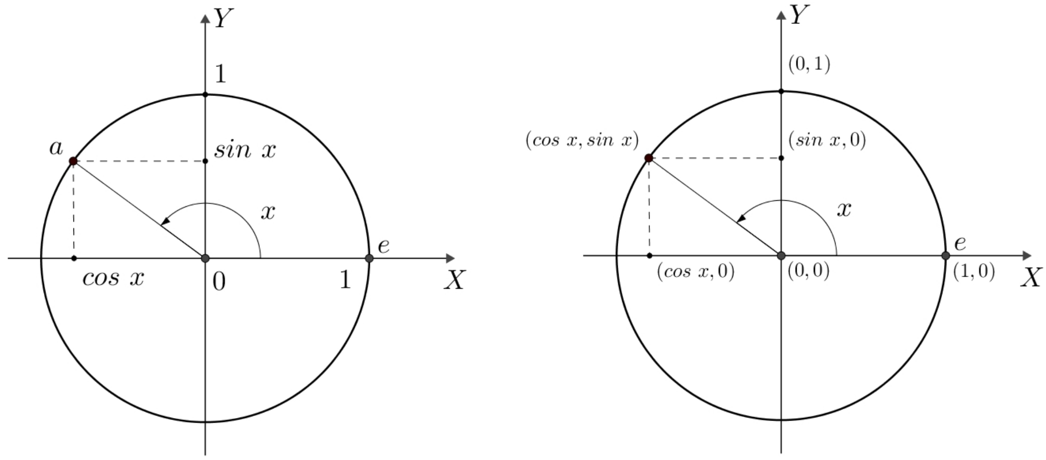


FIGURE 3.13 – Nombres trigonométriques (inspiré de [1])

L'égalité fondamentale est simplement énoncée. Les élèves, aidés des dessins, doivent la démontrer. La bornitude du sinus et du cosinus en est déduite.

Ensuite, la tangente et la cotangente sont définies par les rapports

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

En répondant à des questions, les élèves vont déterminer les conditions d'existence de ces deux nombres trigonométriques. Toujours par le biais de questions, les élèves sont invités aussi à réfléchir à la représentation dans le cercle trigonométrique de la tangente et de la cotangente. Il leur est conseillé d'utiliser le théorème de Thalès dans leur réflexion.

Après des explications sur l'utilisation de la calculatrice, les élèves vont déterminer les nombres trigonométriques des angles particuliers 30°, 45°, 60°. Leur raisonnement est balisé par des questions. Les nombres trigonométriques des angles de 30° et de 60° sont découverts sur base notamment de la construction d'un triangle équilatéral à l'intérieur du cercle trigonométrique. C'est en utilisant la relation fondamentale que les nombres trigonométriques de 45° sont déterminés. Les angles associés sont quant à eux traités dans trois paragraphes qui sont intitulés de la façon suivante : *angles ayant le même sinus, angles ayant même cosinus ou même tangente, angles dont le sinus de l'un égale le cosinus de l'autre.* C'est toujours via des questions que les propriétés des nombres trigonométriques des angles supplémentaires, opposés, antisupplémentaires et complémentaires sont définies.

3.3.5 Équations

Cette partie présente différentes techniques pour résoudre des équations trigonométriques. Aucune nouvelle notion n'est présentée. Pour faciliter la lecture, cette partie est placée dans l'annexe B.4 .

3.3.6 Étude des triangles

Dans cette dernière partie du chapitre, des triangles et des polygones sont construits et résolus. Les auteurs définissent d'ailleurs que *résoudre un triangle, c'est déterminer les éléments inconnus d'un triangle à partir d'éléments connus de ce triangle.*

Dans un premier temps, dans le manuel, il est remarqué que pour que dans la résolution d'*un triangle le nombre de solutions soit fini, il faut donner trois éléments parmi lesquels figure au moins un côté.* Ensuite différents triplets de données sont fournis. Il est dit si ces triplets déterminent un triangle de manière unique ou pas.

Dans un deuxième temps, plusieurs *relations dans les triangles* sont données comme le théorème d'Al Kashi ou les relations aux sinus.

3.3.7 Algorithmes

Dans cette partie, il est proposé aux élèves de concevoir différents programmes comme, par exemple, *les programmes permettant de résoudre les triangles quelconques dans chaque cas.*

3.4 Mathématisons 53, Mathématisons 55 et Mathématisons 57 (Manuel) (De Boeck)

Mathématisons 55 [4] et *Mathématisons 57* [5] datent de 1985 et *Mathématisons 53* [3] date de 1984. Ces trois manuels sont issus de la même collection, celle des *Mathématisons*. Tous les trois ont été écrits par les mêmes auteurs et ils sont tous destinés à des élèves de cinquième année. Ils sont la suite logique de *Mathématisons 44* et de *Mathématisons 46*. Le dernier a déjà fait l'objet d'une analyse. Au cours de notre étude nous ferons parfois référence au *Mathématisons 46*.

La distinction entre ces trois livres est faite au niveau du nombre d'heures de cours hebdomadaires pour lesquels ils sont prévus. *Mathématisons 53* est destiné aux élèves ayant trois heures de mathématique par semaine. *Mathématisons 55* c'est pour le programme de cinq heures de mathématique par semaine et enfin *Mathématisons 57* est prévu pour les cours de mathématique donnés sept heures par semaine.

Voyons comment les notions de trigonométrie sont réparties dans les différents livres.

Le *Mathématisons 53* possède sept chapitres. Celui qui intéresse notre étude est intitulé *fonctions trigonométriques* et il se divise en trois sections nommées :

1. Mesure d'angles et nombres trigonométriques d'un réel ;
2. Étude de fonctions trigonométriques ;
3. Équations et inéquations trigonométriques dérivées.

Le *Mathématisons 55* se compose de neuf chapitres. Celui qui concerne notre étude s'appelle *fonctions trigonométriques* et il est divisé en quatre sections qui sont intitulées :

1. Mesure d'angles et nombres trigonométriques d'un réel ;
2. Étude des fonctions trigonométriques ;
3. Équations et inéquations trigonométriques ;
4. Calcul trigonométrique.

Le *Mathématisons 57* comporte vingt chapitres qui sont répartis selon trois grands thèmes *analyse, géométrie et algèbre*. Deux chapitres rentrent dans le cadre de notre étude. Il s'agit du chapitre portant le nom de *Trigonométrie* et le chapitre intitulé *fonctions circulaires et cyclométriques*. Ils sont tous les deux localisés dans le thème *analyse*.

Le chapitre *trigonométrie* se divise en cinq sections intitulées :

1. Formules d'addition ;
2. Factorisation de $a \ \cos x + b \sin x$;
3. Formules de duplication ;
4. Formules de $\tan \frac{x}{2}$;
5. Formules de Simpson.

Après une mise en situation, le second chapitre est partagé en quatre sections portant le nom de

1. Fonction circulaire ;
2. Équations ;
3. Inéquations ;
4. Fonctions cyclométriques.

Dans les trois manuels, à la fin des chapitres étudiés se trouvent deux séries d'exercices. L'une est intitulée *exercices pour s'entraîner* et l'autre est appelée *exercices pour approfondir.*

Si nous regardons les titres des différentes sections, nous nous apercevons que les structures de *Mathématisons 53* et de *Mathématisons 55* sont proches. Parfois, le manuel à destination du cours de 5h apporte des précisions supplémentaires. Le *Mathématisons 57* est, quant à lui, ordonné différemment car il répartit les notions de trigonométrie sur deux chapitres. Mais il aborde certaines notions de la même façon que les deux autres livres.

Nous avons choisi d'étudier les trois livres en même temps. Notre analyse va suivre la trame de la structure commune du *Mathématisons 53* et du *Mathématisons 55.* Ces livres seront analysés en parallèle. Nous préciserons les éléments qui ont été ajoutés ou retirés d'un manuel à l'autre. L'analyse des notions du *Mathématisons 57* sera intégrée à l'analyse des notions des deux autres. En effet, bien que la structure soit différente, certaines notions sont présentées de la même façon dans les trois livres. Pour *Mathématisons 57*, nous indiquerons dans quel chapitre la notion analysée est présentée.

3.4.1 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est défini dans un plan muni d'un repère orthonormé comme *un cercle pointé, centré à l'origine des axes, de rayon 1, d'origine e point de l'intersection du cercle avec l'axe x.* C'est la même définition dans le *Mathématisons 46.* Dans les trois livres, il s'agit d'un pré-requis.

3.4.2 Mesure d'angle, degré et radian

Une partie de la section *Mesure d'angles et nombres trigonométriques d'un réel* du *Mathématisons 53* et *Mathématisons 55* est consacrée au développement des notions de mesure d'angle. Comme dans *Mathématisons 46*, la définition du degré et du radian est introduite via la notion de marques. L'illustration de ces marques est proche de celle qui se trouve dans le livre pour la quatrième année. La définition du radian est la suivante :*un arc de cercle de* 1 *radian est l'arc de cercle dont la longueur est égale au rayon du cercle.* De plus une remarque est faite sur la détermination principale.

Les définitions du degré et du radian sont considérées comme des pré-requis pour *Mathématisons 57.* De plus dans les définitions, il n'est plus fait mention de marques : *le degré mesure la nonantième partie de l'angle droit positif.* Le radian mesure quant à lui *l'angle qui intercepte un arc de longueur égale au rayon.* Les propriétés des nombres trigonométriques des angles supplémentaires, antisupplémentaires et opposés ainsi que leur détermination sont considérées comme des pré-requis dans *Mathématisons 57.*

3.4.3 Nombres trigonométriques

Tout d'abord, un rappel est effectué dans la partie pré-requis. Le cosinus, le sinus et la tangente sont définis dans le triangle rectangle et dans le cercle trigonométrique comme des coordonnées à l'aide notamment de schémas. Dans *Mathématisons 53* et *Mathématisons 55*, la cotangente est seulement définie par le rapport $cotan\ \hat{a} = \frac{\cos \hat{a}}{\sin \hat{a}}$. Par contre dans *Mathématisons 57*, elle est traitée de la même façon que les trois autres nombres trigonométriques.

Dans la suite des pré-requis, le signe des nombres trigonométriques, la bornitude du sinus et du cosinus ainsi que l'égalité fondamentale qui est, ici, nommée relation de Pythagore sont rappelés. Seul le *Mathématisons 57* mentionne la relation entre la tangente et la cotangente.

Un tableau reprenant les valeurs de nombres trigonométriques des angles de 0°, 30°, 45° et 90° est présent dans les trois livres. Dans *Mathématisons 55*, il est aussi expliqué comment *additionner deux angles orientés* et comment faire le *produit d'un angle orienté par un entier positif* avant d'arriver à la mise en situation. Tout cela est encore considéré comme un rappel.

Dans *Mathématisons 53* et du *Mathématisons 55*, *les nombres trigonométriques d'un réel* sont définis. Ces définitions sont construites de la même manière, nous en retranscrivons qu'une. Voici la définition du sinus :*le sinus du réel x est le sinus de l'angle orienté dont x est l'amplitude en radians.* Les définitions du cosinus, de la tangente et de la cotangente sont assez proches de celle du sinus. Les définitions du sinus, du cosinus et de la tangente sont toutes accompagnées d'une illustration et d'une proposition. Comme toutes les propositions sont construites de la même façon, nous vous proposons la proposition qui accompagne la définition du sinus :

$$\sin x = \sin \hat{\alpha} \textit{ ssi } x \textit{ est une amplitude en radians de } \hat{\alpha}$$

C'est dans le chapitre *fonctions circulaires et cyclométriques* du *Mathématisons 57* que nous retrouvons ces même définitions sans illustrations. Il est aussi précisé qu'il s'agit d'un rappel de quatrième.

3.4.4 Fonctions trigonométriques (circulaires)

Les trois manuels font l'étude des fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente de manière similaire. Cette étude se fait dans le chapitre *fonctions circulaires et cyclométriques* pour *Mathématisons 57*. Dans *Mathématisons 53* et *Mathématisons 55*, la périodicité est développée grâce à un exemple, une définition et une remarque concernant une *économie graphique* qui dit que *si une fonction est périodique de plus petite période strictement positive p, l'étude graphique se fera sur* $[0, p]$ *ou* $[\frac{-p}{2}, \frac{p}{2}]$. En plus dans le livre destiné au cours de cinq heures semaine, la propriété qui dit que

$$\begin{gathered}\textit{si } f : x \to f(x) \textit{ est une fonction périodique de période } p\text{, alors}\\ g : x \to f(kx) \textit{ est une fonction périodique de période } \tfrac{p}{k},\\ h : x \to f(x+k) \textit{ est une fonction périodique de période } p\end{gathered}$$

est énoncée et démontrée.

Les trois manuels étudient donc la fonction sinus, la fonction cosinus, la fonction tangente et la fonction cotangente de façon similaire. D'abord, ils proposent tous les mêmes définitions de ces quatre fonctions. Comme elles sont construites selon le même modèle, nous ne proposons que la définition pour le sinus :

$$\begin{gathered}\textit{sin} \;:\; \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \sin x\\ \textit{où } \sin\; x = \sin \hat{\alpha} \textit{ et } x \textit{ est une amplitude en radians de l'angle orienté } \hat{\alpha}.\end{gathered}$$

Dans les trois manuels, l'étude des fonctions se divise en cinq parties intitulées :

1. *Domaine et image ;*
2. *Périodicité ;*
3. *Racines ;*
4. *Parités ;*
5. *Graphe cartésien de la fonction.*

Pour le sinus et la tangente, le graphe de la fonction est la dernière étape de l'étude. Par contre, pour le cosinus et la cotangente, les auteurs s'appuient respectivement sur le graphe du sinus et le graphe de la tangente pour construire les graphes cartésiens. Ils se basent sur les deux égalités :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \ : \ \cos x &= \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &\text{et} \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \ : \ \operatorname{cotg} x &= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

De plus, les fonctions arc sin, arc cos et arc tg sont définies et tracées dans *Mathématisons 57*. La fonction arc cotg est seulement définie.

3.4.5 Équations et inéquations

Cette partie assez technique présente différentes façons de résoudre des équations et des inéquations trigonométriques. Afin de rendre la lecture la plus fluide possible, le développement effectué est placé dans l'annexe B.5.

3.4.6 Dérivées

Le Mathématisons 53 *propose d'admettre sans démonstration* la formule de la dérivée du sinus et du cosinus. En utilisant la formule de la dérivation d'un quotient, la formule de la dérivée de la tangente est quant à elle démontrée.

3.4.7 Calcul trigonométrique

Le *Mathématisons 53* ne traite pas du calcul trigonométrique.

Après un rappel sur le *produit scalaire dans le plan vectoriel* π_0, le *Mathématisons 55* démontre l'égalité $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ à partir du cercle trigonométrique et du produit scalaire. De là, les autres formules d'addition sont déduites à partir de manipulations de formules.

Ensuite, les formules de duplication, les formules de Carnot sont énoncées et démontrées. Les formules de Simpson sont quant à elle énoncées mais seulement deux d'entre-elles sont démontrées.

Dans *Mathématisons 57*, le calcul trigonométrique est présenté de la même façon que le *Mathématisons 55* si ce n'est que les égalités

$$\sin a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}} \ \text{ et } \ \cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

sont démontrées. Comme déjà dit précédemment, le calcul trigonométrique se trouve dans le chapitre *trigonométrie*.

3.5 Mathématique M51, Mathématique M52, Mathématique M53 (De Boeck)

Mathématique M53 date de 1985. Les deux autres manuels datent quant à eux de 1986. Ces trois livres ont été écrits par les mêmes auteurs. Ces livres se déclarent être « conformes au programme 1984 5$^{\text{ème}}$ année de l'enseignement secondaire ». Ils constituent la suite de *Mathématique M41* qui a déjà été analysé.

Mathématique M53 compte six chapitres qui sont eux-mêmes subdivisés en paragraphes. Ce manuel est conçu pour un enseignement de 3 périodes hebdomadaires. Il se compose de 220 pages. *Mathématique M52* est destiné aux élèves ayant 5 périodes par semaine. Dans ce livre, la matière est répartie en 6 chapitres pour un total de 336 pages. *Mathématique M51* est adressé aux élèves suivant 7 périodes hebdomadaires. Dans ce livre de 496 pages, la matière est cette fois-ci organisée autour de huit chapitres. Dans les deux derniers, chaque chapitre est divisé en paragraphes et chaque paragraphe est encore fractionné en sous-points.

Les trois livres possèdent un chapitre intitulé « *référence* » qui comprend selon les auteurs : « *des notions de base qui interviennent dans les autres chapitres. Il peut être parcouru en début d'année, comme révision, ou consulté, au cours de l'étude des autres chapitres.* »

Dans les trois manuels, les notions de trigonométrie ne sont pas cantonnées ni dans un seul chapitre ni dans un seul paragraphe. Dans le *Mathématique M53*, ces notions se situent dans le chapitre « *référence* » et dans le chapitre « *introduction à l'étude de fonctions* ». Dans les deux autres manuels, les concepts de trigonométrie se retrouvent dans :

1. Le chapitre « *référence* » au paragraphe « *géométrie du plan. Trigonométrie* » ;
2. Le chapitre « *étude des fonctions* » aux paragraphes « *généralités sur les fonctions (suite)* » et « *équations et inéquations trigonométriques* » ;
3. Le chapitre « *limites et continuité* » au paragraphe « *limites* » au sous-point « *limites des fonctions circulaires* » *ou* « *trigonométriques* ».

3.5.1 Angles et cercles

Les trois livres présentent les notions de deux façons différentes.

D'un côté, dans *Mathématique M51*, un angle est défini par deux demi-droites ayant la même origine $[o, a$ et $[o, b$. Il est dit orienté si les demi-droites sont considérées dans l'ordre et non-orienté si ce n'est pas le cas. Ces dernières sont appelées côté de l'angle et l'origine est appelée sommet. Aucune allusion au cercle n'est faite dans ce livre.

De l'autre côté, *Mathématique M52* et *Mathématique M53* présentent les égalités entre les angles correspondants et les égalités entre les angles alternes-internes. Ils mentionnent aussi l'équivalence suivante

$$\widehat{abc} = 1 \text{ droit} \Leftrightarrow c \in C \text{ (cercle de diamètre } [a, b]).$$

La définition de la tangente est introduite en se basant sur la figure 3.14. En déplaçant le point b vers le point a sur le cercle C, *la position limite de la droite ab est la tangente at au cercle, a est son point de contact et at* $\perp$ *oa.* La tangente est alors définie comme *un cercle [qui] est perpendiculaire au rayon passant son point de contact.*

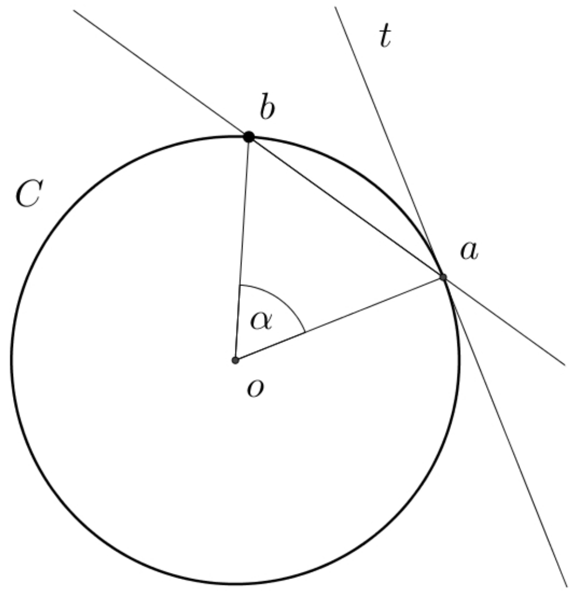


FIGURE 3.14 – Illustration de la définition de la tangente (inspiré de [12])

Toujours en se basant sur la figure 3.14 et en rapprochant les points a et b, les deux manuels remarquent que *les longueurs de la corde* $[ab]$ *et de l'arc* $\widehat{ab}$ *(interceptés par l'angle au centre* $\widehat{aob}$*) sont de plus en plus proches.* Cette constatation peut être utilisée pour construire un segment de droite dont la longueur est équivalente à un arc de cercle donné. Il suffit, comme sur la figure, de reporter à l'aide d'un compas les cordes de petits arcs les unes au bout des autres sur un segment.

3.5.2 Mesure des angles, radian et degré

La mesure des angles est présentée de deux façons différentes.

Dans *Mathématique M52* et *Mathématique M53*, deux systèmes d'unités sont présentés. Le premier est le ≪ *Système degré* ($^\circ$) ≫ pour lequel le degré est défini comme ≪ 1° = nonantième partie d'un droit ≫. Le second système est le ≪ *Système radian* (ρ) ≫ où $1\rho =$ *angle au centre qui intercepte un arc de cercle dont la longueur est celle du rayon du cercle*. Il est aussi précisé que 1 *tour* $= 360^\circ = 2\pi\rho$ avec $\pi = 3,14\ldots$ Une mention de l'unité grade est aussi faite.

Par la suite, la relation liant la mesure en radian d'un angle au centre d'un cercle et la longueur de l'arc de cercle qu'il intercepte est donné.

Enfin, *le sens positif adopté est le sens contraire du sens horloger*. Pour le système degré, la mesure des angles orientés est déterminée à $k.360$ où $k \in \mathbb{Z}$ près et à $2k\pi$où $k \in \mathbb{Z}$ près pour le système radian.

3.5.3 Cercle trigonométrique

La présentation de la notion de cercle trigonométrique se fait de la même façon dans les trois manuels. Dans un repère orthonormé (o, u_x, u_y) où *l'angle orienté* $\widehat{u_x o u_y}$ *est l'angle droit positif*, le cercle trigonométrique est défini comme le cercle de centre 0 et de rayon 1.

A la suite, le point image de tout angle orienté α est défini de la façon suivante :

$$u_\alpha \quad \textit{tel que } \widehat{u_x o u_y} = \alpha \textit{ et } u_\alpha \in U \quad \textit{est le point-image de } \alpha$$

Cette définition est accompagnée de la figure 3.15.

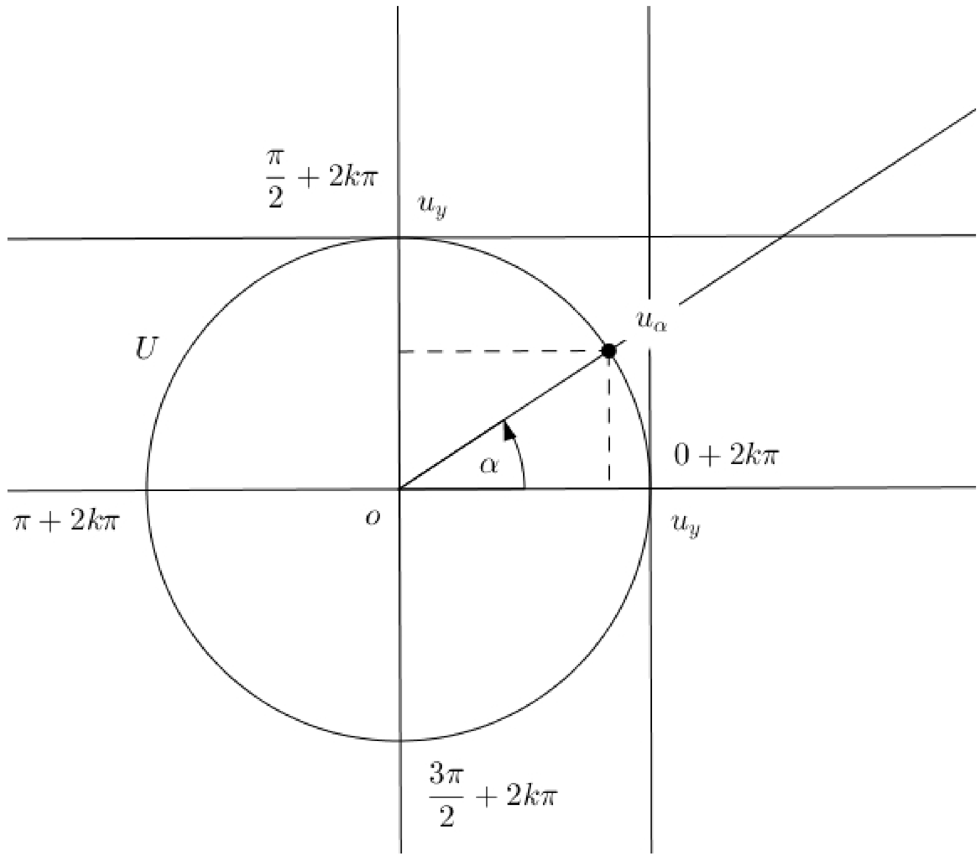


FIGURE 3.15 – Cercle trigonométrique et point-image (inspiré de [13])

3.5.4 Nombres trigonométriques

Les définitions des nombres trigonométriques d'un angle α se basent sur la notion de point-image u_α. Le $\cos\alpha$ *est l'abscisse de* u_α et le $\sin\alpha$ *est l'ordonnée de* u_α. Ces deux définitions sont accompagnées de la formule fondamentale de la trigonométrie.

La tangente et la cotangente sont d'abord définies via les rapports suivants :

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Ensuite, la tangente est aussi décrite comme *l'ordonnée du point où la droite* ou_α *coupe la tangente à* U *en* u_x. La cotangente est alors décrite comme *l'abcisse du point où la droite* ou_α *coupe la tangente à* U *en* u_y.

Un tableau reprenant les valeurs des nombres trigonométriques des angles dits *importants* qui sont les angles de 0°, 30°, 45°, 60° et 90° est aussi présent.

3.5.5 Angles associés

Les angles supplémentaires, complémentaires, antisupplémentaires et opposés sont définis sur base du système radians. Les relations entre les nombres trigonométriques de ces angles sont alors explicitées.

3.5.6 Triangles

Après avoir défini une convention de notation des côtés, des sommets et des angles d'un triangle, les auteurs définissent dans un premier temps différentes formules valables pour les triangles rectangles. Ces formules sont le théorème de Pythagore et les rapports définissant le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente dans de tels triangles.

Dans un second temps, les auteurs définissent différentes formules pour les triangles rectangles comme le théorème de Pythagore généralisé aussi appelé le théorème d'Al-Kashi et la loi des sinus.

3.5.7 Produit scalaire

Une fois une unité de longueur choisie, *le produit scalaire* $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$ *de deux vecteurs* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{oa}$ *et* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{ob}$ est défini comme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{oa} \cdot \overrightarrow{ob} &= \overrightarrow{oa} \cdot \overrightarrow{ob} \text{ avec } b' \text{ projection orthogonale de } b \text{ sur } oa \\ &= ||oa|| \times ||ob|| \times \cos\alpha \quad \text{où} \quad \alpha = \widehat{aob}. \end{aligned}$$

Deux autres formules du produit scalaire sont aussi données dans le cas où le repère est une droite et dans le cas où le repère est orthonormé.

Enfin différentes propriétés comme la bilinéarité et la nullité en cas d'orthogonalité des deux vecteurs.

3.5.8 Fonctions trigonométriques

Les trois manuels adoptent un présentation similaire pour aborder les fonctions circulaires que sont les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente. Mis à part quelques élèments, cette présentation est la même que celle qui est réalisée dans le *Mathématique M41*. Nous allons donc juste détailler ces différences.

Pendant l'énumération des propriétés de la fonction sinus, il est dit qu'elle est périodique de période 2π. Les auteurs profitent alors de cette mention pour *généraliser la notion de fonction périodique* en donnant la définition suivante : *une fonction* f *est périodique ssi il existe un nombre réel non nul a tel que*

$$\forall x \in dom f : f(x \pm a) = f(x)$$

Grâce aux angles complémentaires, une des façons d'obtenir le graphique de la fonction cosinus est d'utiliser *une translation de* $\frac{-\pi}{2}$ selon l'axe x de la fonction sinus. Cette transformation est beaucoup plus détaillée dans les manuels destinés aux élèves de cinquième année. Cela permet aux auteurs de généraliser pour toute fonction f la transformation

$$g : x \mapsto f(x + a) \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

La fonction g s'obtient en retranchant a de l'abscisse de chacun des points du graphique de f.

Avant de donner le graphe et les propriétés des fonctions tangente et cotangente, la fonction générale sinusoïdale

$$x \mapsto a\ \sin(\omega x + \varphi)$$

est définie. Cette définition est la généralisation de différentes fonctions prises comme exemple :

- $x \mapsto \sin(3x)$;
- $x \mapsto \sin(3x + \frac{3\pi}{4}) = \sin 3(x + \frac{\pi}{4})$;
- $x \mapsto 2\sin(3x + \frac{3\pi}{4})$.

La parité, la périodicité et le graphique de chacun de ces exemples sont donnés.

Les manuels comparent aussi le premier exemple avec la fonction $x \mapsto \sin(x)$. En généralisant cette comparaison, cela permet de savoir comment obtenir le graphique de la transformation $g : x \mapsto f(ax)$ où f est quelconque. Il suffit de partir du graphique de f et de diviser par a l'abscisse de chacun des points du graphique de f.

3.5.9 Formules de trigonométrie

Dans *Mathématique M51*, plusieurs formules mettant en jeu différentes fonctions trigonométriques sont démontrées. La première à l'être est

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

La preuve se base sur le produit scalaire. Ensuite, c'est en partant de cette formule que les autres *formules d'addition* sont construites.

Une remarque précise que *ces formules sont aussi valables si a et b sont respectivement les déterminations d'angles (orientés).* Cela peut servir à déterminer le nombre trigonométrique d'un angle qui ne fait pas partie des angles particuliers. Par exemple

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3} - 1\right) = 0.2588. \end{aligned}$$

Une application des formules d'addition permet de transformer

$$x \mapsto y = a\cos x + b\sin x \quad (a, b \in \mathbb{R}_0\ ;\ x \in \mathbb{R})$$

en fonction sinusoïdale.

Ensuite, les *formules de multiplication par 2, les expressions de* $\sin a$*,* $\cos a$ *et* $\operatorname{tg} a$ *en fonction de* $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ *et les formules de factorisation* sont démontrées.

Le *Mathématique M52* présente les formules trigonométriques de la même façon mis à part deux éléments. Il n'y est pas fait mention de l'application de transformation en fonction sinusoïdale. Les expressions de $\sin a$, $\cos a$ et $\operatorname{tg} a$ en fonction de $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$ n'y sont pas présentes.

Les formules trigonométriques ne se trouvent non plus dans le *Mathématique M53*.

3.5.10 Équations et inéquations

Afin de rendre la lecture plus aisée, cette partie a été placée dans l'annexe B.6. En effet, les éléments développés dans cette partie sont particulièrement techniques et aucune nouvelle notion n'est introduite.

3.6 Savoir et savoir-faire en Mathématique (4^e niveau B) de H. Dessain

Ce livre [6] datant de 1985 est destiné aux élèves de l'enseignement de transition qui ont eu, en troisième année, quatre heures de mathématique par semaine et qui, en quatrième année, suivront le même régime.
Il est constitué de huit chapitres dont le dernier porte sur la trigonométrie. Il se subdivise en sept points :

1. Nombres trigonométriques dans le triangle rectangle ;
2. Angles orientés ;
3. Nombres trigonométriques d'un angle orienté ;
4. Angles associés ;
5. Nombres trigonométriques d'angles remarquables ;
6. Équations trigonométriques.
7. Règle du sinus

Chacun de ces points est subdivisé en paragraphes dont le dernier est en général réservé pour quelques exercices.

3.6.1 Étude des triangles

La première partie de ce chapitre est consacrée aux *nombres trigonométriques dans le triangle rectangle*. Il s'agit pour les auteurs de faire un rappel sur les définitions du cosinus, du sinus et de la tangente. Ces notions sont définies comme des rapports entre les côtés du triangle rectangle. Il s'agit d'une matière qui a déjà été abordée l'année précédente.

3.6.2 Angle

Dans ce manuel, un angle est défini comme *la réunion de deux demi-droites qui ont même origine.* Nous retrouvons aussi la notion d'orientation positive et négative d'un angle mais sans mention de sens horloger et sens antihorloger. Une attention toute particulière est faite au sujet de la notation d'un angle et de son orientation. De plus, le manuel stipule qu'un abus de langage est fait en *assimilant un angle orienté à un de ses représentants.* Ici, les représentants sont les figures géométriques constituées des *couples de demi-droites de même origine.* Ci-dessous, une illustration présente sur la figure 3.16 des différents représentants d'un même angle orienté.

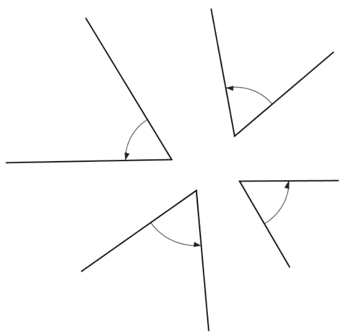


FIGURE 3.16 – Plusieurs représentants de l'angle orienté de 60° (inspiré de [6])

3.6.3 Mesure d'angle, degré et radian

Au début du chapitre, l'unité des angles orientés utilisée est le degré. Elle est définie de la façon suivante : *Le degré est l'amplitude d'un angle qui intercepte* $\frac{1}{360}$ *d'un cercle centré en son sommet.* De plus, les deux sous-unités du degré que sont la minute et la seconde sont aussi définies. *Un degré vaut* 60 *minutes ; une minute vaut* 60 *secondes.*

Les auteurs mentionnent que la demi-droite d'un angle peut faire un tour complet et ainsi revenir à sa position initiale. Cela implique une certaine multiplicité des mesures. En effet, un angle orienté de 60° est aussi un angle orienté de $60^\circ + k360^\circ$ où $k \in \mathbb{Z}$. Ils expliquent aussi comment faire la somme de deux angles orientés. L'ensemble des angles orientés est identifié comme un groupe commutatif.

Le manuel définit le radian comme *l'amplitude d'un angle qui intercepte sur un cercle centré en son sommet un arc dont la longueur est le rayon de ce cercle.* Cette définition a été introduite par *le calcul de la mesure de l'arc et de la mesure du secteur circulaire*[2] *interceptés par un secteur angulaire*[3] *au centre d'un cercle.* Par la suite, une conversion entre degré et radian est proposée sous la forme d'un tableau reprenant des angles particuliers comme 0°, 30°, $45^\circ, \ldots$ De plus l'évaluation en degré d'un radian est fournie.

3.6.4 Cercle trigonométrique

Après une définition de la mesure algébrique d'un vecteur, le cercle trigonométrique est défini comme un cercle de rayon égal à 1 qui est centré à l'origine d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont le plan est muni. Un angle est alors *rapporté au cercle trigonométrique.*

3.6.5 Nombres trigonométriques

Pour ce livre, le sinus et le cosinus sont le sinus et le cosinus d'un angle $\hat{\theta}$. Ces deux notions sont définies à partir du cercle trigonométrique. Les auteurs utilisent le point P qui est défini comme l'intersection du côté extrémité de l'angle $\hat{\theta}$ et le cercle trigonométrique afin d'aboutir à la définition suivante : *la coordonnée du point* P *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$ *est* $(\cos\hat{\theta}, \sin\hat{\theta})$. $\cos\hat{\theta}$ *est donc l'abscisse de* P *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. $\sin\hat{\theta}$ *est donc l'ordonnée de* P *dans le repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'égalité fondamentale $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ est démontrée via le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle placé dans le cercle trigonométrique. La bornitude du sinus et du cosinus découle directement de cette égalité.

La tangente et la cotangente d'un angle orienté sont d'abord définies comme des rapports : *la tangente de l'angle orienté* $\hat{\theta}$ *est le quotient de son sinus par son cosinus. la cotangente de l'angle orienté* $\hat{\theta}$ *est le quotient de son cosinus par son sinus.* C'est à partir de ces définitions que les conditions d'existence sont mises en place. De plus, le manuel propose une représentation géométrique de ces deux concepts à partir d'homothéties.

Les angles associés sont aussi traités. Les angles opposés, complémentaires, supplémentaires et antisupplémentaires sont dans un premier temps définis et représentés. Dans un second temps, les différentes propriétés du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente de ces angles sont explicitées.

2. Un secteur de disque ou secteur circulaire est une portion de disque limitée par deux rayons du disque.
3. Un secteur angulaire est une figure plane obtenue par intersection ou réunion de deux demi-plans délimités par des droites sécantes ou confondues.

Les nombres trigonométriques des angles remarquables sont aussi présents. Pour l'angle de 60°, le cosinus est trouvé par la construction d'un triangle équilatéral à l'intérieur du cercle trigonométrique. De là, le sinus d'un angle de 60° est déduit grâce à l'égalité fondamentale. De plus, la tangente et la cotangente sont trouvées grâce au rapport des deux nombres trigonométriques précédents. L'angle de 30° étant le complémentaire d'un angle de 60°, les nombres trigonométriques de cet angle sont facilement découverts. Le cosinus et le sinus de l'angle de 45° sont établis grâce à l'égalité fondamentale. A la fin, un tableau récapitulatif des ces nombres trigonométriques est proposé.

3.6.6 Équations

Ce livre évoque brièvement les équations. Les différents éléments propre à ce sujet sont développés dans l'annexe B.7.

3.6.7 Règles des sinus

La dernière partie du chapitre de trigonométrie explique deux propriétés liant le sinus et des éléments d'un triangle quelconque :

1. *La mesure de l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit des mesures de deux côtés par le sinus de l'angle qu'ils bordent ;* ≫
2. *Dans un triangle, les mesures des côtés sont proportionnelles aux sinus des angles opposés.*

Ces deux propriétés sont démontrées. La seconde se base sur la première pour être démontrée. Par la suite, plusieurs exemples de résolutions de triangles sont proposés.

3.7 Savoir et savoir-faire en mathématique (H. Dessain)

Ce livre [7] datant de 1994 est destiné aux élèves de l'enseignement de transition de quatrième année. Suite à un changement dans les programmes, tous les étudiants ont, jusqu'en quatrième année, le même nombre d'heures de mathématique par semaine. Ce manuel est une nouvelle édition d'un manuel déjà analysé [6] qui se conforme au nouveau programme. En ce qui concerne le chapitre de trigonométrie, aucune modification n'a été constatée.

Chapitre 4

Évolution de la présentation des notions et commentaires

Ce chapitre est composé de trois parties. La première partie a pour objectif de se faire une idée de l'évolution subie par les différentes notions de trigonométrie qui ont été abordées dans les chapitres précédents. La seconde partie proposera des hypothèses visant à expliquer les raisons de ces évolutions. Enfin, la dernière partie présentera un questionnaire à destination des élèves. Il aura pour but de voir comment ces derniers appréhendent les différentes notions trigonométriques qui sont en lien avec nos considérations des deux premières parties de ce chapitre.

4.1 Évolution

La présentation de cette évolution suivra un ordre proche de celui avec lequel les notions sont présentées dans le *Traité de Trigonométrie rectiligne.* Néanmoins des différences sont quand même à relever. Dans la foulée de l'évolution relative aux unités de mesure d'arcs et d'angles, nous aborderons conjointement l'évolution de ces notions. De plus, nous ne ferons pas de distinction entre les nombres trigonométriques d'un angle aigu et les nombres trigonométriques d'un angle quelconque. Le fait de s'inspirer du *Traité* a été guidé par le concept de la transposition didactique. En effet, nous l'avons considéré comme faisant partie du savoir savant. Il semblait dès lors logique d'analyser l'évolution des notions avec comme point de départ ce livre et, de plus, de s'inspirer de l'ordre avec lequel il présente les notions.

4.1.1 Unités des mesures d'arcs et d'angles

Dans le *Traité de Trigonométrie rectiligne*, les unités présentées sont le degré, le grade et le radian. Toutes les trois bénéficient d'un traitement similaire. Elles sont d'abord définies en tant qu'unités de mesure d'arcs. Ensuite ces unités sont définies comme des unités de mesure d'angles. Le radian est considéré comme l'unité d'arc et d'angle par défaut.

Dans tous les manuels analysés, la notion de mesure d'arc a été abandonnée. Seule la notion de longueur d'arc subsiste. Les trois unités précédemment évoquées sont alors considérées comme étant des unités pour les mesures d'angles. De plus, selon les manuels, le grade est soit cité de manière anecdotique, soit tout simplement omis.

Trois façons d'introduire les unités ont été repérées. La première, proche du savoir savant, consiste à définir le degré comme une partie d'un angle et le radian comme *l'angle qui intercepte un arc égal au rayon sur tout cercle décrit de son sommet comme centre.* La seconde façon de définir ces différentes unités se base sur la notion d'abscisse curviligne. Enfin, la dernière méthode consiste à enrouler un cercle autour d'une tangente graduée. La table 4.1 reprend les différentes unités abordées dans les différents manuels ainsi que la façon avec laquelle elles ont été introduites.

Manuel	Degrés	Radian	Grade	Division	Abscisse curviligne	Enroulement
Traité(1941)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$
M41 (1976)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
Mathématique 2B (1977)	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$	$\times$
Mathématisons 46 (1983)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
Mathématisons 53 (1984)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
Mathématisons 55 (1985)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\surd$
Mathématisons 57 (1985)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$
M 53 (1985)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$
M 52 (1986)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$
M 51 (1986)	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$	$\surd$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	$\surd$	$\surd$	$\times$	$\surd$	$\times$	$\times$

Table 4.1 – Différentes unités et leur introduction

4.1.2 Arcs et angles

En comparant le *Traité de Trigonométrie rectiligne* avec les autres manuels, nous constatons que la notion de mesure d'arc a quasiment totalement disparu des livres scolaires. Cette notion a été remplacée par celle de mesure d'angle. Par exemple le *Traité* parle des nombres trigonométriques d'un arc tandis que les manuels évoquent les nombres trigonométriques d'un angle.

4.1.3 Cercle trigonométrique

La façon de présenter le cercle trigonométrique n'a pas beaucoup évolué. Mais nous pouvons remarquer quelques différences. Quand le *Traité de Trigonométrie rectiligne* parle d'axes rectangulaires, tous les autres manuels placent le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé. De plus, les livres de la gamme *Mathématique* et le manuel *Mathématique 2B* (1977) précisent la possibilité d'intégrer des angles à l'intérieur du cercle trigonométrique.

4.1.4 Nombres trigonométriques

En analysant le *Traité de Trigonométrie rectiligne*, nous avons déterminé trois niveaux de définition pour le sinus et le cosinus.

Le premier niveau de définition est illustré par la figure 4.1 sur laquelle nous trouvons notamment un cercle à l'intérieur duquel se trouvent deux axes rectangulaires. Ce niveau découle directement de la définition de ces deux nombres trigonométriques dans les triangles rectangles. En effet, le sinus et le cosinus sont respectivement définis comme le rapport de la longueur de PM sur le rayon et comme le rapport de la longueur QM sur le rayon. En considérant un angle aigu, ces rapports peuvent s'écrire comme [1]

$$\begin{aligned} \sin a &= \frac{PM}{OM} \\ \cos a &= \frac{QM}{OM} = \frac{OP}{OM}. \end{aligned}$$

1. Les notations de [21] ont été conservées.

Notons qu'en écrivant la double égalité, l'auteur de ce manuel annonce déjà la suite du raisonnement.

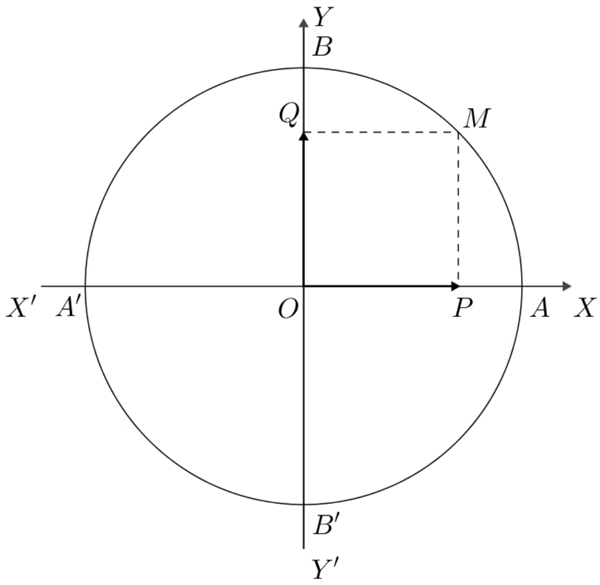


FIGURE 4.1 – Illustration du sinus et du cosinus (inspiré de [21])

Le second niveau de définition consiste à ajouter l'hypothèse que la longueur du rayon du cercle vaut une unité de longueur. Les formules précédentes peuvent alors s'écrire comme

$$\begin{aligned}\sin a &= \overline{PM} = \overline{OQ}\\ \cos a &= \overline{QM} = \overline{OP}.\end{aligned}$$

Enfin, le troisième niveau de définition consiste à définir les deux nombres trigonométriques soit comme une projection du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sur les axes, soit comme les coordonnées du point M et ce toujours dans un cercle de rayon égal à 1.

En analysant les manuels, nous avons constaté que toute la réflexion proposée par le savoir savant a été éludée. Le sinus et le cosinus ne sont plus définis que par des projections ou par des coordonnées.

Dans le *Traité*, les définitions de sinus et de cosinus nécessitent peu d'hypothèses notamment pour le cercle. Dans les manuels, le cercle utilisé est systématiquement un cercle trigonométrique. Cela permet d'avoir un rayon d'une longueur égale à une unité métrique et ainsi d'utiliser des définitions de troisième niveau.

Le tableau 4.2 répertorie les définitions utilisées pour définir le sinus et le cosinus dans les différents manuels.

Manuel	Coordonnées	Projections
Traité (1941)	$\surd$	$\surd$
M41 (1976)	$\times$	$\surd$
Mathématique 2B (1977)	$\times$	$\surd$
Mathématisons 46 (1983)	$\surd$	$\times$
Mathématisons 53 (1984)	$\surd$	$\times$
Mathématisons 55 (1985)	$\surd$	$\times$
Mathématisons 57 (1985)	$\surd$	$\times$
M 53 (1985)	$\surd$	$\times$
M 52 (1986)	$\surd$	$\times$
M 51 (1986)	$\surd$	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	$\surd$	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	$\surd$	$\times$

Table 4.2 – Définition des nombres trigonométriques

4.1.5 Nombres trigonométriques des angles de 30°, 45° et 60°

Le *Traité de Trigonométrie rectiligne* détermine les valeurs des nombres trigonométriques des angles de 30°, 45° et 60° grâce notamment à des constructions. Il utilise différents polygones réguliers inscrits à un cercle ainsi que des formules géométriques afin de réaliser cette détermination.

Tous les livres destinés aux classes de quatrième secondaire déterminent les nombres trigonométriques des angles de 30° et de 60° en construisant un triangle équilatéral à l'intérieur du cercle trigonométrique et en utilisant la relation fondamentale $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. Les nombres trigonométriques de l'angle de 45° sont identifiés en utilisant la relation fondamentale et l'égalité qui existe entre le sinus et le cosinus de cet angle.

Les manuels destinés aux élèves de cinquième secondaire se contentent de résumer les différentes valeurs des nombres trigonométriques de ces angles dans un tableau à double entrée.

4.1.6 Relations entre les nombres trigonométriques des angles associés

Le *Traité de Trigonométrie rectiligne* présente les relations des nombres trigonométriques entre les angles *égaux, supplémentaires, anti-supplémentaires, opposés et complémentaires* sous la forme de cinq *principes* qui découlent de quatre *théorèmes*. Ces cinq principes sont démontrés notamment à l'aide du cercle trigonométrique.

Tous les manuels donnent des relations des nombres trigonométriques entre les *angles supplémentaires, anti-supplémentaires, opposés et complémentaires*. Notons que les livres *Mathématisons 53* (1984), *Mathématisons 55* (1985), *Mathématisons 57* (1985) ne font pas mention des angles complémentaires.

Enfin, contrairement aux autres manuels, les livres de la collection *Mathématisons* ne présentent pas les notions selon les types d'angles mais par rapport aux relations entres les nombres trigonométriques.

Dans tous ces manuels, la présentation des angles associés et des relations de leurs nombres trigonométriques est toujours accompagnée d'une illustration. Le tableau 4.3 inventorie les relations trigonométriques entre les angles associés abordées en fonction des manuels.

Manuel	Egaux	Opp.	Comp.	360°	Supp.	Anti-supp.
Traité (1941)	√	√	√	×	√	√
M41 (1976)	×	√	√	×	√	√
Mathématique 2B (1977)	√	√	√	√	√	√
Mathématisons 46 (1983)	×	√	√	×	√	√
Mathématisons 53 (1984)	×	×	×	×	×	×
Mathématisons 55 (1985)	×	×	×	×	×	×
Mathématisons 57 (1985)	√	√	×	×	√	√
M 53 (1985)	√	√	√	×	√	√
M 52 (1986)	√	√	√	×	√	√
M 51 (1986)	√	√	√	×	√	√
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	×	√	√	×	√	√
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	×	√	√	×	√	√

TABLE 4.3 – Formules trigonométriques

4.1.7 Réduction au premier quadrant

Le *Traité de Trigonométrie rectiligne* propose dans un premier temps, un ensemble de principes qui donnent *les relations entre les nombres trigonométriques de certains arcs.* Ensuite, pour *la réduction au premier quadrant*, ce livre donne un mode opératoire en trois étapes.

Les livres *Mathématique 2B* (1977) et *Mathématique M41* (1976) présentent la réduction au premier quadrant comme un ensemble de cas de figures à envisager. Pour chacun d'entre eux, une action impliquant les angles associés, est proposée afin de les ramener à un angle aigu.

Aucun des autres manuels n'explique comment procéder pour faire une réduction au premier quadrant. Remarquons que certains livres comme, par exemple, *Mathématisons 46* (1983) donne des indications sur l'usage de la calculatrice.

Le tableau 4.4 permet de visualiser quel manuel évoque la réduction au premier quadrant.

Manuel	Réduction au premier quadrant
Traité (1941)	√
M41 (1976)	√
Mathématique 2B (1977)	√
Mathématisons 46 (1983)	×
Mathématisons 53 (1984)	×
Mathématisons 55 (1985)	×
Mathématisons 57 (1985)	×
M 53 (1985)	×
M 52 (1986)	×
M 51 (1986)	×
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	×
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	×

TABLE 4.4 – Réduction au premier quadrant

4.1.8 Variation des fonctions circulaires

Commençons cette section par une remarque sur le nom donné aux fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente. Ces fonctions sont appelées soit *fonctions circulaires* soit *fonctions trigonométriques*. Dans le *Traité de Trigonométrie rectiligne* ces fonctions sont nommées *fonctions circulaires directes*. Les manuels de la collection *Mathématique* utilisent la dénomination *fonctions circulaires* tout comme le livre *Mathématisons 57* (1985). Néanmoins, les livres *Mathématique M52* et *Mathématique M53* (1985) évoquent rapidement le terme de *fonctions trigonométriques*. C'est cette appellation qui est exclusivement utilisée dans les ouvrages *Mathématisons 53* (1984) et *Mathématisons 55* (1985). Afin d'unifier nos propos, nous allons garder la dénomination *fonctions circulaires* lorsque nous parlerons des différentes fonctions.

Dans le *Traité de Trigonométrie rectiligne*, les fonctions sinus et cosinus sont étudiées en termes de variation sur l'intervalle $[0, 2\pi[$ à partir d'un cercle trigonométrique et d'un tableau. Ensuite, le graphique de ces deux fonctions est obtenu en plaçant différentes valeurs sur le graphe. Les fonctions tangente et cotangente sont étudiées de la même manière sur l'intervalle de variation $[0, \pi]$.

Dans les manuels de la collection *Mathématique*, l'analyse des différentes fonctions trigonométriques commence par la construction de ces dernières. Les différentes propriétés des fonctions circulaires sont d'abord déterminées analytiquement. Les conséquences graphiques de ces propriétés sont alors explicitées.

Les livres destinés aux classes de cinquième année de la collection *Mathématisons* réalisent une étude s'intéressant aux différentes caractéristiques des fonctions circulaires telles que le domaine, l'image, la périodicité, les racines, ... Les graphiques sont placés, à chaque fois, à la fin de l'étude de chaque fonction. En fait, les informations glanées pendant l'étude de la fonction servent à la construction de cette dernière.

4.1.9 Inversion des fonctions circulaires

La partie intitulée *Inversion des fonctions circulaires* (trigonométriques) du *Traité de Trigonométrie rectiligne* est divisée en trois parties :

1. Recherche de la valeur des arcs dont un nombre trigonométrique est donné. Il s'agit de trouver la valeur de x telle que

$$\begin{aligned}\sin x &= a \text{ avec } |a| \leq 1\\ \cos x &= b \text{ avec } |b| \leq 1\\ \operatorname{tg} x &= c.\end{aligned}$$

   Cette recherche se fait en toute généralité à partir d'un cercle trigonométrique afin de mettre en place différentes formules.
2. Recherche de la valeur d'arcs ayant le même nombre trigonométrique. Il s'agit de trouver la valeur de l'arc x et de l'arc y sachant que $\sin x = \sin y$, $\cos x = \cos y$ ou $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$. Les solutions sont présentées sous la forme de théorèmes. Ceux-ci sont démontrés sur base du point précédent.
3. Présentation des fonctions circulaires inverses qui sont arc sin et arc cos.

Comme nous pouvons le constater, cette partie du *Traité* reprend un certain nombre d'éléments qui sont traités dans les manuels sous le nom *d'équations fondamentales* ou *d'équations élémentaires*. Comme il s'agit d'éléments techniques, nous avons placé la suite de cette analyse dans l'annexe B.8.

Notons simplement que le livre *Mathématisons 57* est le seul manuel à développer les fonctions arc sin, arc cos, arc tg et arc cotg. Ces quatre fonctions sont appelées *fonctions cyclométriques*. Le tableau 4.5 répertorie les manuels qui abordent ce type de fonctions.

Manuel	Arc sinus Arc cosinus Arc tangente
Traité (1941)	$\surd$
M41 (1976)	$\times$
Mathématique 2B (1977)	$\times$
Mathématisons 46 (1983)	$\times$
Mathématisons 53 (1984)	$\times$
Mathématisons 55 (1985)	$\times$
Mathématisons 57 (1985)	$\surd$
M 53 (1985)	$\times$
M 52 (1986)	$\times$
M 51 (1986)	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	$\times$

Table 4.5 – Les fonctions *cyclométriques*

4.1.10 Relations entre les nombres trigonométriques d'un même arc

Dans tous les livres qui ont été analysés, la tangente et la cotangente sont définies comme des rapports entre sinus et cosinus. Ces deux nombres trigonométriques sont aussi vus comme des coordonnées dans les manuels *Mathématique* destinés aux classes de cinquième secondaire.

L'égalité [2] $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ est, généralement, démontrée en utilisant le théorème de Pythagore dans un triangle rectangle placé dans un cercle trigonométrique. L'utilisation de ce théorème pourrait expliquer le fait que les ouvrages de la série *Mathématisons* nomme cette égalité *égalité de Pythagore*. Le manuel *Mathématique M41* (1976) apporte néanmoins une variante en démontrant l'égalité en utilisant la notion de distance toujours dans un cercle trigonométrique.

A l'instar du *Traité de Trigonométrie rectiligne*, le livre *Mathématique 2B* (1977) manipule l'égalité précédente afin d'en obtenir deux autres.

2. Nous avons choisi de conserver autant que faire se peut l'ordre du *Traité*. Placée dans le *Traité* entre l'inversion de fonctions circulaires et les formules trigonométriques, cette égalité intervient dans les manuels pour la détermination des valeurs des nombres trigonométriques des angles mesurant 45°.

4.1.11 Formules trigonométriques

Dans les livres analysés qui traitent de formules trigonométriques, la partie qui y est consacrée commence toujours par la démonstration de

$$\cos(a-b) = \cos a \ \cos b + \sin a \ \sin b.$$

Le *Traité de Trigonométrie rectiligne* propose trois démonstrations pour montrer cette égalité :

- Démonstration se basant sur les notions d'*abscisse curviligne* et sur les notions de projection ;
- Démonstration se basant sur les propriétés des *quadrilatères convexes inscrits* ;
- Démonstration de Gauss.

Tous les autres ouvrages qui abordent les formules trigonométriques, à savoir *Mathématique 2B* (1977), *Mathématisons 55 et 57* (1985), *Mathématique M51 et M52* (1986), démontrent cette formule d'addition en utilisant la notion de *produit scalaire.*

Par la suite, tous les manuels suivent le même cheminement afin de démontrer les différentes formules trigonométriques. Les autres formules d'addition sont obtenues par manipulation de la formule ci-dessus. Les formules de duplication sont, ensuite, atteintes à partir des différentes formules d'addition. C'est en manipulant les différentes formules de duplication que les formules de Carnot ainsi que les expressions du $\sin a$ et du $\cos a$ en fonction de $\tan \frac{a}{2}$ sont démontrées. Les formules de Simpson sont quant à elles prouvées à partir des formules d'addition. Notons que certains manuels abordent la factorisation de l'expression $a \cos x + b \sin x$.

Le cheminement effectué par les manuels afin d'obtenir les différentes formules trigonométriques peut être résumé par le schéma suivant :

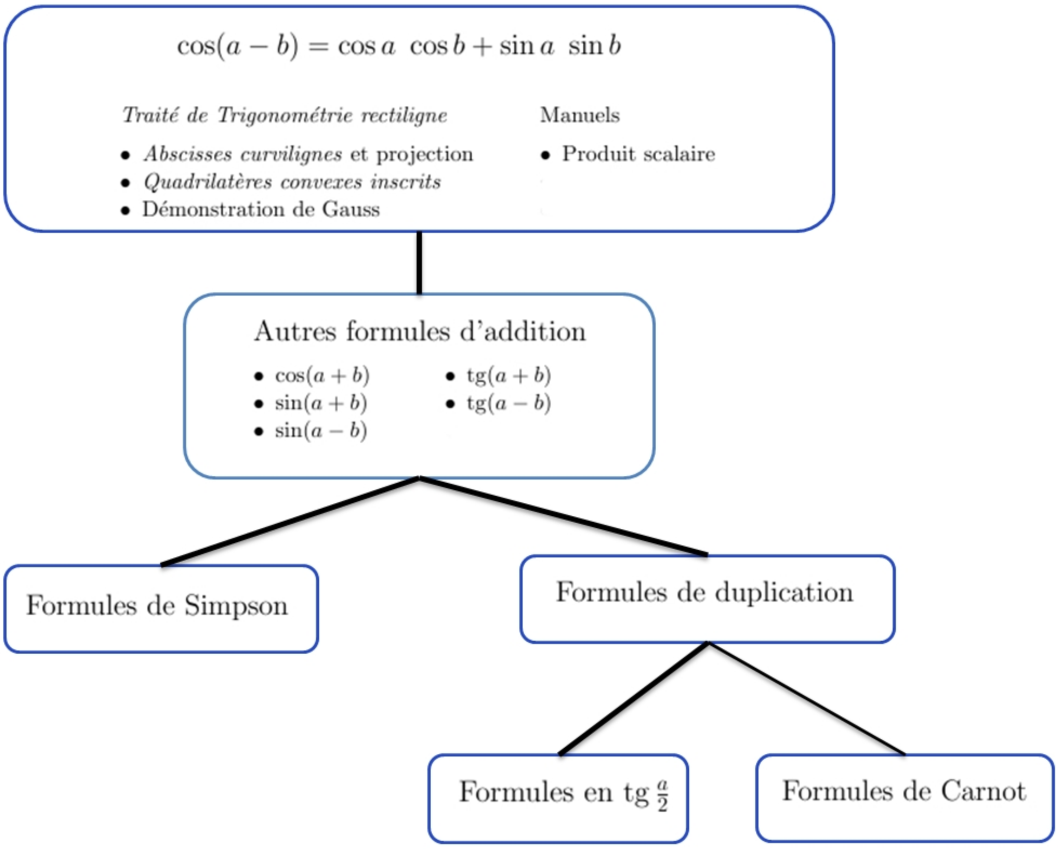


FIGURE 4.2 – Lien entre les différentes formules trigonométriques

Le tableau 4.6 inventorie les formules trigonométriques abordées dans les différents manuels.

Manuel	Addition	Duplication	Carnot	en $\mathrm{tg}\,\frac{a}{2}$	$a\cos x + b\sin x$	Simpson
Traité (1941)	√	√	√	√	×	√
M41 (1976)	×	×	×	×	×	×
Mathématique 2B (1977)	√	√	√	√	×	√
Mathématisons 46 (1983)	×	×	×	×	×	×
Mathématisons 53 (1984)	×	×	×	×	×	×
Mathématisons 55 (1985)	√	√	√	√	×	√
Mathématisons 57 (1985)	√	√	√	√	√	√
M 53 (1985)	×	×	×	×	×	×
M 52 (1986)	√	√	√	×	×	√
M 51 (1986)	√	√	√	√	√	√
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	×	×	×	×	×	×
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	×	×	×	×	×	×

TABLE 4.6 – Les formules trigonométriques

4.1.12 Tables trigonométriques et calculatrice

Le manuel *Mathématique 41* traite de l'utilisation des tables trigonométriques de la même façon que le *Traité de Trigonométrie rectiligne* explique l'utilisation de la table des valeurs naturelles. Seul un autre livre fait mention des tables trigonométriques, il s'agit de *Mathématique 2B* (1977). Ce manuel ne donne pas d'explication, il ne fait que les mentionner. Il est précisé que *l'emploi des tables a été évoqué pratiquement dans notre manuel 3B. De plus, les tables comprennent toujours une notice explicative.*

D'autres manuels font mention de l'utilisation de *machine à calculer* ou de *micro-ordinateurs*. Remarquons aussi que *Mathématique 2B* (1977) parle aussi de *règle à calculer*. Le tableau 4.7 reprend, selon les manuels, les différents moyens de calcul abordés.

Manuel	Tables	Règle	Calculatrice	Micro-ordinateur
Traité (1941)	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$
M41 (1976)	$\surd$	$\times$	$\times$	$\times$
Mathématique 2B (1977)	$\surd$	$\surd$	$\surd$	$\times$
Mathématisons 46 (1983)	$\times$	$\times$	$\surd$	$\surd$
Mathématisons 53 (1984)	$\times$	$\times$	$\surd$	$\surd$
Mathématisons 55 (1985)	$\times$	$\times$	$\surd$	$\surd$
Mathématisons 57 (1985)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
M 53 (1985)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
M 52 (1986)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
M 51 (1986)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

TABLE 4.7 – Les tables trigonométriques, la calculatrice et les appareils électroniques

4.2 Commentaires sur l'évolution des notions

Dans cette section, nous allons commenter les évolutions que nous avons constatées précédemment. Nous allons formuler des hypothèses qui pourraient expliquer ≪ pourquoi l'évolution a été dans ce sens ≫.

L'ordre de ces commentaires ne sera pas exactement l'ordre avec lequel l'évolution des notions a été présentée. Certains regroupements ont été effectués car l'évolution d'un point de matière peut avoir influencé l'évolution d'autres notions. Par exemple, la disparition de l'utilisation des tables trigonométriques a eu de l'influence sur la réduction au premier quadrant.

4.2.1 Unités de mesure d'arcs et d'angles

Nous allons aborder différents éléments. Nous essayerons de comprendre les raisons de la disparition progressive du grade dans les manuels et nous ferons le point sur les différentes façons de définir les unités de mesure d'angles.

Comme nous le voyons sur la table 4.1 à la page 60, le grade tend à disparaître. Certaines définitions du degré et du grade sont assez proches. Il suffit de penser à celles basées sur la division d'un angle droit. L'une consiste à le diviser en nonante parties tandis que l'autre le divise en cent éléments. Malgré ces similitudes, le degré a été choisi au détriment du grade. Une explication possible est qu'un cercle mesuré en degrés possède des multiples de deux, trois et cinq tandis qu'un cercle mesuré en grade ne possède que des multiples de deux et de cinq. Ce déficit en multiples de trois signifie donc que certaines mesures entières d'angles exprimées en degré ne sont plus des mesures entières une fois exprimées en grade. C'est par exemple le cas avec les angles de 30° et 60° dont les nombres trigonométriques sont si élégants. L'angle de 30° correspond à un angle de $33,333\ldots\ gr$ et l'angle de 60° correspond à un angle de $66,666\ldots\ gr$. Ceci peut expliquer la disparition du grade des livres scolaires. Enfin remarquons que le grade est considéré comme l'unité de mesure d'angle en topographie [3]. Cela est dû au fait que cette unité est plus facile à manipuler que le degré car elle est en base 10.

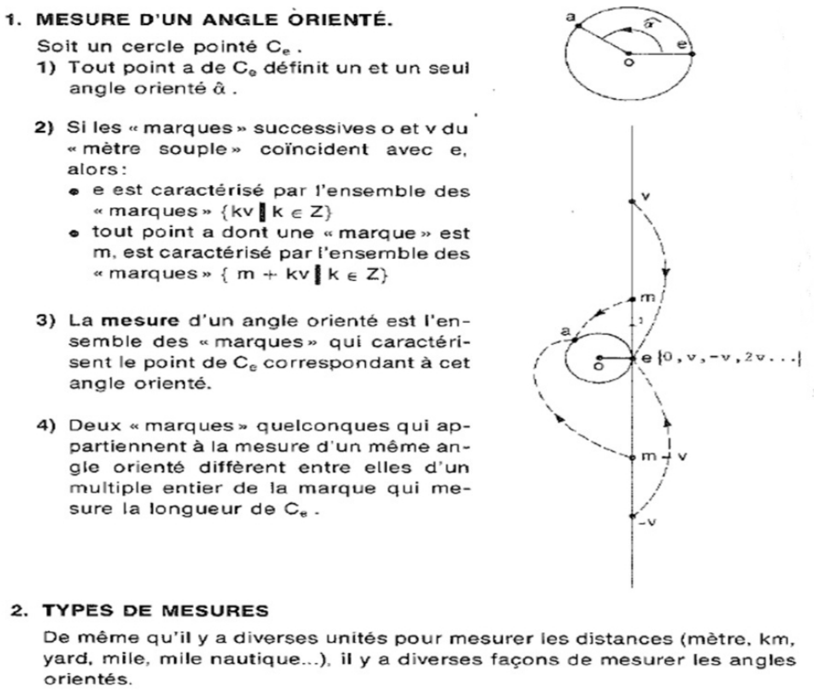
Intéressons-nous maintenant à la manière avec laquelle les unités sont définies. Dans certains manuels, elles sont définies à partir de l'enroulement d'un cercle autour d'une tangente. Dans le livre *Mathématique 2B* [2] de 1977, ces unités sont définies via la notion d'abscisse curviligne. Ces deux façons de faire sont finalement assez proches. En effet, elles passent toutes les deux par la longueur d'arc afin de déterminer la mesure de l'angle sous-tendu par cet arc.

En effet, l'abscisse curviligne permet d'obtenir algébriquement la longueur d'un arc à l'instar de l'abscisse pour une droite graduée. La méthode de « l'enroulement » utilise aussi la longueur de l'arc pour définir des objets mathématiques tels que, par exemple, les *marques* présentes dans la collection *Mathématisons* [4]. Pour appuyer ce propos, comparons l'image 4.3 à la page 70 provenant de la collection *Mathématisons* illustrant « l'enroulement » avec la définition suivante : *L'abscisse curviligne en base n d'un vecteur de* C_e *est l'ensemble* $\{m + k\ 2n \mid 0 \leq m < 2n, m \textit{ fixé dans } \mathbb{R} \textit{ et } k \in \mathbb{Z}\}$. Cette définition est présente dans le manuel *Mathématique 2B* (1977).

Nous pouvons remarquer la similitude entre la notion de *marque* et celle d'*abscisse curviligne*. En allant plus loin, nous pourrions utiliser l'« enroulement » afin d'illustrer la notion d'*abscisse curviligne*. Ces deux façons d'aborder les mesures d'angles peuvent être intéressantes pour l'introduction du radian. Ces dernières, tout comme le radian, font le lien entre la mesure d'un angle et la longueur de l'arc de cercle.

Venons-en maintenant aux livres qui introduisent les mesures d'angles et d'arcs à partir de divisions. Mis à part les deux livres de la collection *Savoir & savoir-faire en mathématique* [5] de 1985 et de 1994, les autres manuels utilisant la division, présentent le degré et parfois le grade, quand celui-ci est mentionné, comme une partie d'un angle droit. Même si cela peut sembler évident, aucun de ces ouvrages ne précise ce qu'est un angle droit. Il faut particulièrement faire attention à ne pas définir cet angle via son amplitude. Dans ce cas, nous serions face à deux définitions qui se renverraient l'une à l'autre. D'un côté il y aurait la définition du degré comme la nonantième partie d'un angle droit et de l'autre il y aurait l'angle droit comme un angle dont l'amplitude vaut nonante degrés. Mais aucune de ces deux définitions ne pourrait venir avant l'autre. Cela est d'autant plus vrai que le degré est une unité qui est connue par les élèves bien avant l'étude de la trigonométrie. Cette unité est déjà vue dans l'enseignement primaire. Ces deux définitions se renvoyant l'une à l'autre sont susceptibles de poser des problèmes aux élèves lors de la construction de leur savoir.

3. Technique de représentation sur un plan des formes du terrain, avec les détails des éléments naturels ou artificiels qu'il porte.
4. [1],[3],[4],[5] datant de 1984 et 1985
5. [6], [7]



1. MESURE D'UN ANGLE ORIENTÉ.

Soit un cercle pointé C_e.

1) Tout point a de C_e définit un et un seul angle orienté $\hat{\alpha}$.

2) Si les « marques » successives o et v du « mètre souple » coïncident avec e, alors :

- e est caractérisé par l'ensemble des « marques » $\{kv \mid k \in Z\}$
- tout point a dont une « marque » est m, est caractérisé par l'ensemble des « marques » $\{m + kv \mid k \in Z\}$

3) La **mesure** d'un angle orienté est l'ensemble des « marques » qui caractérisent le point de C_e correspondant à cet angle orienté.

4) Deux « marques » quelconques qui appartiennent à la mesure d'un même angle orienté diffèrent entre elles d'un multiple entier de la marque qui mesure la longueur de C_e.

2. TYPES DE MESURES

De même qu'il y a diverses unités pour mesurer les distances (mètre, km, yard, mile, mile nautique...), il y a diverses façons de mesurer les angles orientés.

Figure 4.3 – Mesure d'un angle orienté (extrait de [1])

Une solution à ce possible problème est apportée par les manuels *Savoir & savoir-faire en mathématique 4b* et *Savoir & savoir-faire en mathématique 4* . Ils définissent le degré comme une division non pas de l'angle droit mais comme celle du cercle. Une autre façon d'envisager la chose est de d'abord définir l'angle droit comme la moitié de l'angle plat dont, la définition ne pose pas de problème puisqu'elle découle directement de la droite..

4.2.2 Arcs et angles

Ce commentaire est l'occasion d'évoquer les notions de mesure d'arc et de mesure d'angle. Nous allons d'abord proposer des hypothèses qui pourraient expliquer le remplacement de la première notion par la seconde lors du passage du *Traité* aux manuels. Nous aborderons ensuite les conséquences de ce remplacement.

Partons d'abord de la constatation que ces deux notions sont assez proches l'une de l'autre. Par exemple, elles ont les mêmes unités de mesure. En effet, le *Traité* précise qu'un *angle a la même mesure que l'arc qu'il intercepte.* De plus, *les nombres trigonométriques de l'angle* a *sont aussi les nombres trigonométriques de l'arc* a. Un autre exemple de cette proximité entre ces deux objets mathématiques est que le sens positif a la même signification pour l'arc que pour l'angle.

Toujours dans le *Traité*, il semblerait que l'arc se confond, à certaines occasions, avec sa mesure. Par exemple, deux arcs sont dits complémentaires *quand leur somme est* $\frac{\pi}{2}$.

Néanmoins, la notion d'arc peut présenter des difficultés aux élèves. En conservant cette notion, les élèves sont confrontés à la fois aux mesures d'arcs et aux longueurs d'arcs. Ces deux grandeurs ayant des unités différentes cela peut présenter des problèmes de compréhension.

De plus, intuitivement, ces deux grandeurs sont assez difficiles à appréhender ensemble. Observons l'arc AB et l'arc CD de la figure 4.4.

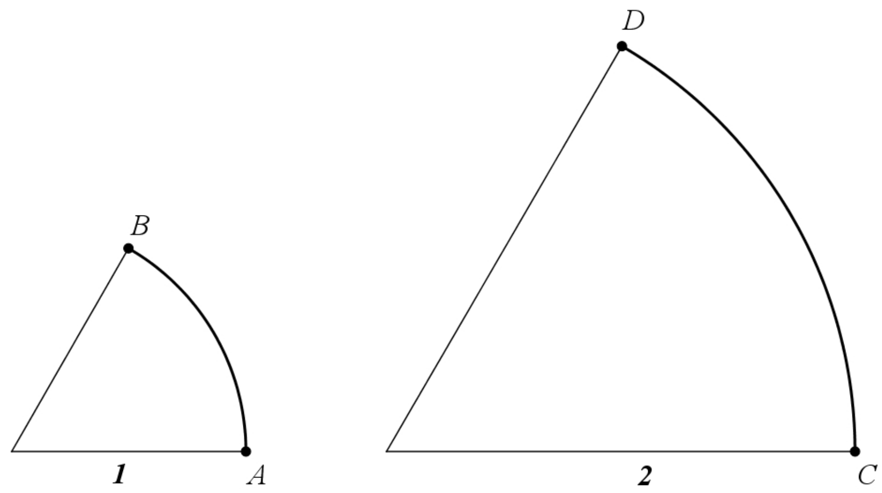


FIGURE 4.4 – Deux arcs mesurant $\frac{\pi}{3}$

Ces deux arcs mesurent $\frac{\pi}{3}$ mais la longueur de l'arc CD est deux fois plus grande que celle de l'arc AB. Le passage de la longueur d'arc à la mesure d'arc peut donc s'avérer déstabilisant pour les élèves. Le remplacement de la notion d'arc par la notion d'angle, lorsqu'il s'agit de mesure, permet d'éviter certaines ambiguïtés. Pour parfaire les choses, les ouvrages de la collection *Savoir et savoir-faire en mathématique* ne parlent plus de mesure d'angle mais d'*amplitude*. C'est une façon de laisser de côté le terme de mesure qui donne envie d'utiliser des unités de longueur.

Ce remplacement a des conséquences. Certains adjectifs qui étaient initialement attribués aux arcs dans le *Traité* ont ≪ glissé ≫ vers les angles dans les manuels scolaires. C'est par exemple le cas avec les adjectifs de supplémentaires, complémentaires ou d'opposés. Le *Traité* parle de nombres trigonométriques d'un arc alors que tous les manuels évoquent les nombres trigonométriques d'un angle.

4.2.3 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique tel qu'il est défini dans le *Traité* est muni de deux axes rectangulaires. Les manuels remplacent ces deux axes par un repère orthonormé. Même si ces deux objets mathématiques sont presque équivalents, le terme repère orthonormé fait écho à un ensemble de notions comme origine, abscisse, ordonnée, ... Tous ces termes, les élèves les ont déjà rencontrés au cours de leur scolarité. Cela facilite l'introduction des définitions du sinus et du cosinus en termes de coordonnées.

4.2.4 Tables trigonométriques, réduction au premier quadrant, angles associés et calculatrice

Nous allons dans un premier temps faire un lien entre l'utilisation des tables trigonométriques, la réduction au premier quadrant et les relations entre les nombres trigonométrique des angles associés. Dans un second temps, nous préciserons les modifications qui ont eu lieu lors de l'apparition des machines à calculer dans les classes.

En observant la table 4.4 de la page 63 et la table 4.7 de la page 68, nous pouvons affirmer que là où les tables trigonométriques sont utilisées, la réduction au premier quadrant est présentée. En effet, les tables trigonométriques reprennent les nombres trigonométriques d'un grand nombre d'angles appartenant tous au premier quadrant. Pour connaître la valeur des nombres trigonométriques d'un angle qui n'est pas dans le premier quadrant, il faut faire une réduction au premier quadrant. Cette détermination se base sur les propriétés des angles associés.

Lors de la recherche de nombres trigonométriques, si le passage par la réduction au premier quadrant est dans certains cas obligatoire, c'est parce que les tables ne reprennent que les informations qui concernent les angles du premier quadrant. Si ces tables possédaient les valeurs pour les angles des quatre quadrants, il n'y aurait plus besoin de se ramener au premier quart de cercle. Mais de telles tables auraient le défaut d'être encombrantes. Les différentes tables se rapportant à la trigonométrie présentes dans l'ouvrage *Tables de Logarithmes et autres tables B* [22] occupent une part importante de ce livre alors qu'elles ne concernent que le premier quadrant. Des tables similaires pour les angles des quatre quadrants prendraient quatre fois plus de place. Cela ne serait pas sans conséquences techniques et financières pour, au final ne reprendre que des informations redondantes.

L'apparition des machines à calculer et des micro-ordinateurs a permis l'abandon des tables trigonométriques et, du coup, la réduction au premier quadrant. Avec de tels instruments électroniques, il n'y a plus besoin de revenir au premier quadrant. En effet, ces machines utilisent un algorithme du nom de *CORDIC*[8] qui permet d'obtenir instantanément les nombres trigonométriques d'un angle de n'importe quelle mesure.

Avec la disparition de la réduction au premier quadrant, nous pourrions nous demander s'il est encore utile d'aborder dans un manuel scolaire les angles associés et les relations qui existent entre leurs nombres trigonométriques. En effet, ceux-ci sont à la base de la réduction au premier quadrant. Mais certaines de ces relations interviennent dans le développement des formules trigonométriques. C'est le cas pour les relations des angles opposés et celles des angles complémentaires. Elles permettent le passage de la formule $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ aux autres formules d'additions desquelles découlent la plupart des autres formules trigonométriques.

4.2.5 Variations des fonctions circulaires

Le *Traité* et les manuels ont deux philosophies assez différentes en ce qui concerne la construction des graphes des fonctions circulaires. L'objectif du *Traité* semble être l'obtention des graphes. Avec les informations qu'il a à sa disposition, résumées dans un tableau, il réalise un tracé point par point. Par contre, les manuels qui s'intéressent à cette matière ne tracent plus point par point les différentes fonctions. Ils réalisent une véritable étude de fonction afin de disposer du graphe de ces fonctions.

Contrairement au *Traité*, l'objectif des manuels n'est plus seulement l'obtention des graphes des différentes fonctions trigonométriques. À travers d'étude de ces fonctions, ils traitent du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente de manière analytique. Dans les livres *Mathématique M51* [13] et *Mathématique M52* [14] datant tous les deux de 1986, et dans *Mathématique M53* [12] de 1985, cette matière fait partie intégrante de la partie *introduction à l'étude des fonctions*. Dans les manuels de la série *Mathématisons*, le chapitre sur les *fonctions circulaires* se trouve directement après le chapitre sur les *fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$*.

Remarquons que tous les livres analysés utilisent les propriétés des nombres trigonométriques des angles supplémentaires, complémentaires et opposés pour tracer le graphe du cosinus à partir de celui du sinus et pour tracer le graphe de la cotangente à partir de celui de la tangente.

4.2.6 Relations entre les nombres trigonométriques des angles associés

Le *Traité* présente les angles associés et les relations entre leurs nombres trigonométriques au travers de cinq principes desquels découlent quatre théorèmes. Les démonstrations des différents principes se basent sur un cercle trigonométrique dans lequel un certain nombre de symétries sont utilisées. Retenir l'ensemble des énoncés des différents principes et théorèmes est loin d'être facile.

Les manuels, quant à eux, présentent les choses d'une manière différente. Ils accompagnent ces notions avec des illustrations. Ces schémas représentent les constructions réalisées dans le cadre des différentes démonstrations.

Ici, nous constatons une diminution de la formalisation. Les élèves ne sont plus face à l'énoncé de théorèmes. Ils sont maintenant face à des schémas reprenant la même information. Cette manière de procéder remplace la mémorisation en donnant plus d'importance à la réflexion.

4.2.7 Formules trigonométriques

La principale différence entre le *Traité de Trigonométrie rectiligne* et les manuels traitant des formules trigonométriques se situe au niveau de la façon de démontrer l'égalité

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Tous les manuels utilisent la notion de produit scalaire pour réaliser cette preuve alors que le *Traité* propose trois démonstrations. La première démonstration se base sur les propriétés des quadrilatères convexes inscrits et sur les nombres trigonométriques dans le triangle rectangle. Elle a pour avantage de n'utiliser que des principes trigonométriques déjà vus et de démontrer plusieurs formules trigonométriques d'une seule fois. Par contre, elle requiert un certain nombre de constructions. La seconde démonstration est appelée *démonstration de Gauss*. Celle-ci est tellement technique que N.-J. Schons l'a placée en annexe de son ouvrage. Enfin la dernière démonstration se base sur la notion de projection. Cette notion est d'ailleurs développée directement avant cette preuve. Il s'agit d'une nouvelle notion dans le *Traité*. Malgré cette introduction, il me semble que cette démonstration soit la plus abordable par les élèves puisqu'elle ne demande qu'un nombre restreint de constructions.

Nous pouvons d'ailleurs voir une certaine ressemblance entre cette dernière preuve et celle qui est réalisée dans les ouvrages scolaires. En effet, le produit scalaire peut-être mis en relation avec avec la notion de projection. Les livres de la collection *Savoir et savoir-faire en mathématique* (1985 et 1994) proposent même *une autre expression du produit scalaire entre deux vecteurs* basée sur la projection.

Nous pouvons constater que la transposition didactique a modifié la troisième preuve utilisant les projections afin d'obtenir une preuve basée sur le produit scalaire.

4.2.8 Nombres trigonométriques

En analysant le *Traité de Trigonométrie rectiligne*, nous avons constaté que, dans la réflexion menée pour obtenir les définitions du sinus et du cosinus, on parcourait trois niveaux de définition. Le premier niveau définit ces deux nombres trigonométriques comme des rapports de longueurs. Le second les définit comme des longueurs. Le troisième niveau considère le sinus et le cosinus comme des projections ou des coordonnées.

Cette démarche est assez intéressante car elle permet de passer d'une définition proche de celle des nombres trigonométriques dans les triangles rectangles à une définition en termes d'abscisse et d'ordonnée. Pourtant dans aucun des manuels, une démarche similaire n'a pu être observée. En effet, la majorité de ceux-ci se cantonnent à utiliser des définitions de niveau 3.

Une explication possible de l'abandon des autres types de définitions est, que définir le sinus et le cosinus comme des coordonnées est particulièrement commode et intuitif lorsqu'il faut étudier le signe de ces deux nombres trigonométriques. Il n'est pas nécessaire de considérer le sens du vecteur comme cela est fait dans le *Traité* avec les définitions des deux autres niveaux.

Néanmoins ne considérer le sinus et le cosinus des angles du cercle trigonométrique qu'en termes de coordonnées ou de projections fait oublier que ces deux nombres trigonométriques sont avant tout des rapports de longueurs. En faisant cela, on pourrait donner l'impression que d'un côté il y a le sinus et le cosinus dans le triangle rectangle et que de l'autre il y a le sinus et le cosinus dans le cercle trigonométrique. Les deux notions seraient dissociées alors qu'elles ne font qu'une.

4.2.9 Valeurs des nombres trigonométriques des angles particuliers

Afin de déterminer les valeurs des nombres trigonométriques des angles particuliers, le *Traité* utilise des polygones réguliers inscrits dans un cercle. Mais cette démarche nécessite la connaissance de plusieurs relations géométriques. Il faut notamment connaitre la relation entre la longueur de l'apothème et le rayon du cercle pour le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier.

Dans les manuels, cette recherche est principalement menée avec l'aide de l'égalité fondamentale $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1$. Cette façon de faire a pour principal avantage de limiter le nombre d'éléments ≪ de par coeur ≫. Pour découvrir la valeur de $\cos 30^\circ$, les élèves n'ont plus besoin de savoir que $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ est la formule qui lie a, la longueur de l'apothème d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, avec le rayon de ce cercle.

Le fait que l'on puisse déterminer la valeur des nombres trigonométriques d'angles particuliers a été très utile pour la construction des tables. Ces tables sont, en effet, fondamentales à la pratique de la trigonométrie. En utilisant les relations qui existent entre les nombres trigonométriques des angles associés, il est possible de déterminer la valeurs des nombres trigonométriques d'un certain nombre d'autres angles. Mais cela ne suffit pas pour construire les tables dans leur entièreté. Pour ce faire, il faut mettre en place des techniques de construction. Le développement de ces techniques a occupé des générations entières de mathématiciens au cours des siècles.

Nous devons la première table de l'histoire à Hipparque, un astronome ayant vécu pendant le second siècle avant notre ère. Il s'agissait d'une table de corde qui est une notion proche de celle de sinus. Cette table ne contenait les valeurs que pour une cinquantaine de mesures d'arc. Au IIe siècle ap. J.-C, Ptolémée a construit une table trigonométrique bien plus détaillée en s'inspirant des *Éléments* d'Euclide. Il a mis au point une technique basée sur différentes formules trigonométriques et sur la connaissance de cordes particulières. D'autres techniques ont été développées. C'est d'ailleurs lors de ces développements qu'un mathématicien indien dont on ignore le nom, a eu l'idée d'utiliser des demi-cordes et non plus des cordes. Il venait de créer le sinus. Toutes ces méthodes ont une filiation avec Ptolémée. Mais leur principale faiblesse est que la valeur de $\sin 1^\circ$ n'est pas atteignable. Différentes méthodes d'estimation ont aussi été développées.

Les tables trigonométriques ont donc traversé les siècles et ont été utilisées jusque très récemment. Les calculatrices qui les remplacent maintenant utilisent l'algorithme *CORDIC*[6] pour calculer la valeur des nombres trigonométriques des angles. C'est un algorithme qui a été implémenté à la fin des années cinquante et qui figurait déjà dans les premières calculatrices qui sont apparues au milieu des années septante. Ce code s'appuie notamment sur la formule $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$. Nous ne sommes donc, encore une fois, pas fort éloignés de Ptolémée.

4.2.10 Conclusion

Le chapitre de trigonométrie est assez riche en notions inédites pour les élèves. Chacune d'entre elle a subi une importante transposition didactique. L'objectif de la transposition est de rendre abordable par les élèves les éléments du savoir savant, tout en ne le trahissant pas. La réflexion qui a été menée dans cette section s'intéresse aux étapes de cette transposition et plus particulièrement au passage du savoir savant au savoir à enseigner. Le maitre mot de cette évolution est la sélection.

Le savoir savant est tellement vaste que la noosphère est contrainte à faire des choix. Des deux unités jumelles que sont le grade et le degré, le degré a été choisi au détriment du grade plus pratique mais moins élégant à certains abords. Les auteurs des manuels se sont inspirés d'une seule des trois démonstrations du savoir savant pour construire une preuve de la formule trigonométrique d'où découlent toutes les autres. Ils ont choisi la démonstration qui était, selon eux, la plus abordable par les élèves. Toujours avec cette volonté d'accessibilité, la recherche des valeurs des nombres trigonométriques d'angles particuliers basée sur les polygones réguliers a été délaissée au profit de l'utilisation de l'égalité fondamentale ainsi que des constructions plus simples. C'est toujours ce même désir d'accessibilité qui justifie le fait que les différents principes et théorèmes reprenant les relations entre les angles associés et leur nombres trigonométriques sont remplacés par un schéma.

Le choix de présenter certains éléments de matière d'une certaine manière a pour but de faciliter l'introduction d'autres matières. Placer un repère orthonormé à l'intérieur du cercle trigonométrique a pour but de rendre plus intelligible la définition du sinus et du cosinus comme des coordonnées. Néanmoins, cette façon de les définir peut faire oublier que ces deux objets mathématiques sont des rapports de longueurs.

La place du chapitre de trigonométrie dans les différents ouvrages a aussi son importance. En le plaçant après ou même dans la partie consacrée à l'étude de fonctions, la découverte des différentes fonctions trigonométriques se fait dans le cadre plus vaste de l'analyse.

Il ne faut pas oublier que l'émergence des machines à calculer a eu un impact assez conséquent sur le chapitre de trigonométrie. Cela a provoqué la disparition des manuels scolaires de l'apprentissage de l'utilisation chronophage des tables et de la réduction au premier quadrant qui était basée sur les angles associés.

6. Acronyme de *cooordinate rotation digital computer* qui signifie calcul numérique par rotation de coordonnées.

4.3 Questionnaire à destination des élèves

Je voudrais terminer ce travail par un questionnaire qui nous permettrait de nous rendre compte des difficultés qu'ont les élèves à appréhender la trigonométrie, matière qui peut s'avérer compliquée sous certains aspects. Ce questionnaire serait destiné aux élèves de quatrième et de cinquième année de l'enseignement secondaire. Il pourra être soumis une première fois aux élèves qui sont en quatrième année, juste après qu'ils aient vu la trigonométrie. Les élèves de cinquième année pourront répondre deux fois à ce questionnaire ; une première fois avant d'avoir abordé la trigonométrie et une seconde fois juste après. Ces multiples soumissions permettront de voir comment la compréhension des différentes notions évolue au cours du temps et cela permettra aussi de mesurer l'impact de l'apprentissage des nouvelles notions sur d'autres déjà apprises.

Nous allons maintenant commenter les différentes questions présentes dans le questionnaire. Nous expliquerons pourquoi nous les avons choisies et nous essayerons d'anticiper les réponses que les élèves pourraient nous fournir. Ce questionnaire se trouve dans l'annexe C.

1. Définis ce qu'est la trigonométrie.

Le mot trigonométrie est un mot nouveau pour la majorité des élèves. Pour la plupart d'entre eux, il peut même sembler exotique. Je pense qu'il est important que les élèves comprennent bien le sens de ce mot. Cette compréhension peut être pour eux une aide pour aborder plus facilement la matière. C'est pour cela que voir comment ils comprennent le mot trigonométrie est important. De plus, demander ce qu'est la trigonométrie est aussi un moyen de voir ce que les élèves considèrent comme notions appartenant à la trigonométrie.

Un détour par l'étymologie de ce mot peut être intéressant pour aider les élèves à bien appréhender le sens de ce mot. La trigonométrie est la réunion des mots grecs *trigonom* et *mestria* qui signifient respectivement triangle (ou trigone un autre mot pour triangle) et mesure. La trigonométrie est donc la science qui s'intéresse à la mesure des triangles.

2. Cite quelques professions qui font appel à l'emploi de la trigonométrie.

Cette question est un moyen détourné de demander aux élèves quelles sont les applications possibles de la trigonométrie dans la vie de tous les jours. Cette matière peut leur sembler abstraite. Pourtant il est possible de l'ancrer dans notre réalité. Cette matière a d'ailleurs été développée par l'homme afin de modéliser le monde qui l'entourait. Ses applications sont nombreuses. Il suffit de penser à l'astronomie, à la construction de bâtiments, à la navigation maritime.

Notons aussi que la trigonométrie est aussi utilisée dans le domaine de l'acoustique. Les livres de la collection *Mathématisons* introduisent l'étude des fonctions trigonométriques à partir d'un diapason.

Cette question nous permet de comprendre comment les élèves considèrent la trigonométrie. S'agit-il pour eux d'une matière scolaire ou d'un savoir applicable dans le monde réel ?

Je pense que cette question est assez difficile car elle nécessite un certain recul de la part des élèves au sujet de leur apprentissage. Ils doivent envisager des situations où la trigonométrie pourrait être utile.

3. Si tu la connais, explique la signification des mots suivants. Tu peux t'aider d'un schéma.

- **Degré, grade, radian**

  Nous allons nous intéresser au degré, au grade et au radian. L'objectif de cette question est de savoir comment les élèves définissent ces différentes unités et ce qu'elles représentent pour eux. Il sera possible de voir si les élèves proposent des définitions plus basées sur « l'enroulement » ou plus basées sur « la division ». Ce sera aussi l'occasion de savoir de quels moyens les élèves ont besoin pour expliquer ces notions. Utilisent-ils la langue française ou un schéma ?

  Il est possible que la majorité des élèves ne sachent pas ce qu'est le grade. En effet, cette unité a été délaissée au profit de degré. Pourtant le grade est encore utilisé dans certains domaines comme celui de la topographie.

  Nous serons aussi attentifs à la façon avec laquelle les élèves définissent le radian. Cette unité est basée sur le rayon et la longueur d'arc. Il me semble qu'elle est plus difficile à appréhender que les deux autres. Avec cette unité, nous pouvons rencontrer des difficultés proches de celles qui ont été évoquées pour les arcs.

- **Sinus, cosinus, tangente et cotangente** [7]

  Dans un premier temps, nous allons analyser comment les élèves définissent le sinus et le cosinus. Est-ce qu'ils définissent ces deux nombres trigonométriques en tant que rapport de longueurs ou en tant que coordonnées. Lors de l'analyse des manuels, nous nous sommes rendus compte que la plupart de ces ouvrages définissaient ces deux nombres trigonométriques comme des coordonnées. La question est de savoir si cette nouvelle définition ne fait pas oublier que les nombres trigonométriques n'ont pas d'unité. La réponse à notre interrogation est directement liée avec la question suivante de notre questionnaire qui est *quelles sont les unités du cosinus et du sinus ?*.

  Dans un second temps, nous voudrions savoir le type de rapport que les élèves utilisent pour définir la tangente et la cotangente. Est-ce un rapport avec le sinus et le cosinus ou un rapport de longueurs ?

4. Quelles sont les unités du cosinus et du sinus.

Nous avons déjà abordé cette question lorsque nous avons demandé les définitions du sinus et du cosinus. Je pense qu'il est possible que certains élèves donnent des unités d'angles ou des unités de longueur aux nombres trigonométriques alors qu'il s'agit de nombres purs sans unité.

5. As-tu eu besoin d'utiliser ta calculatrice pour ce chapitre de trigonométrie ?

Cette question, avec son échelle d'utilisation, nous permet de connaitre la place occupée par la calculatrice dans ce chapitre. Il est possible que cette place varie en fonction du professeur. Pour certains d'entre eux, l'utilisation de la calculatrice est secondaire. Nous avons laissé la possibilité de répondre que la calculatrice n'était pas du tout utilisée dans le cadre de ce chapitre même si cette réponse semble peu probable.

7. Remarquons que la cotangente ne fait plus partie du programme. Dès lors, il est possible que certains élèves ne sachent pas expliquer la signification de ce mot.

Il faut aussi prendre garde à cette question qui est particulièrement subjective. En effet, nous demandons leur avis aux élèves au sujet d'une fréquence. Il est probable que la réponse varie d'un élève à l'autre. Je pense que, dans une même classe, les élèves risquent de répondre différemment à cette question.

6. Qu'est-ce qu'un cercle trigonométrique ? À quoi sert-il ? Dessine-le.

Je pense que le cercle trigonométrique est un outil assez difficile à appréhender pour les élèves. Un grand nombre de notions sont munies de l'adjectif qualificatif ≪ trigonométrique ≫. Il faut alors faire attention au fait que les élèves ne considèrent pas tous les cercles centrés à l'origine ou tous les cercles de rayon égal à l'unité comme des cercles trigonométriques.

Cet outil est très important dans ce chapitre. Il permet de développer d'autres notions comme par exemple les angles associés et les relations qui existent entre leurs nombres trigonométriques.

7. Explique comment trouver le sinus et le cosinus d'un angle droit ?

Pour répondre à cette question, il est probable que les élèves utilisent la définition du sinus et du cosinus en termes de coordonnées. Cela est dû au fait qu'en utilisant les triangles rectangles, il n'est pas possible de déduire le sinus et le cosinus d'un angle droit. Comme nous l'avons déjà évoqué, la définition en termes d'abscisse et d'ordonnée est plus commode à utiliser.

Conclusion

Les trois premiers chapitres de ce mémoire sont particulièrement descriptifs. Dans la première partie du chapitre 1, nous avons décrit ce qu'était la théorie de la transposition didactique ainsi que les différents éléments qui en faisaient partie. Dans la seconde partie de ce chapitre, nous nous sommes intéressés au savoir savant, l'élément à la base de cette transposition. Pour cela, nous avons décrit les différentes notions présentes dans le *Traité de Trigonométrie rectiligne* qui a été écrit par N.-J. Schons.

Dans les deux chapitres suivants, nous avons analysé le savoir à enseigner. Ce savoir est une transposition du savoir savant au monde scolaire. Le chapitre deux est consacré à l'analyse de différents programmes. Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés à la façon avec laquelle les différentes notions étaient présentées dans un total de sept manuels scolaires. Programmes et manuels sont tous les deux des productions de la noosphère. Les programmes que nous avons choisis d'analyser sont en relation directe avec les manuels. En effet, les auteurs de ces ouvrages se basent sur ce qui est prescrit dans les programmes pour écrire leurs livres. Même si elles semblent rébarbatives, ces différentes descriptions sont un passage nécessaire à la compréhension de l'évolution des différentes notions étudiées dans ces trois chapitres.

Le chapitre quatre a, quant à lui, été divisé en trois parties. La première de ces parties est un résumé de l'évolution subie par les différentes notions. Plus précisément, à travers ce résumé, nous avons tenté de retracer, notion par notion, les évolutions repérées lors du passage du *Traité* aux manuels et celles détectées lors de la transition d'un manuel à un autre.

Une fois cela effectué, nous avons essayé, dans la seconde partie de ce chapitre, de comprendre les raisons de ces évolutions. Nous nous sommes d'abord rendus compte que ces évolutions étaient dues à des choix. Pour faire rentrer la trigonométrie dans les classes, la noosphère a été contrainte d'en faire. Le savoir savant est tellement vaste et parfois ardu qu'il ne peut pas y rentrer tel quel. En faisant des choix, la noosphère veut optimiser la compréhension des différents concepts par les élèves. Cela se traduit de différentes manières. Par exemple, le grade a été abandonné au profit du degré. Des schémas sont utilisés à la place de théorèmes pour présenter les relations trigonométriques entre les angles associés. Dans la première partie, nous avons aussi vu une certaine volonté de trouver une méthode de recherche des valeurs des nombres trigonométriques des angles particuliers qui semble se vouloir la plus accessible possible aux élèves. De plus, certains choix de présentation d'éléments de matière sont faits dans l'optique de faciliter l'introduction d'autres notions. C'est notamment le cas lorsque le cercle trigonométrique est muni d'un repère orthonormé. Cela permet de définir le sinus et le cosinus comme des coordonnées. Cette façon de procéder est plus commode pour étudier le signe de ces deux nombres trigonométriques. Par contre, définir le cosinus et le sinus en terme d'abscisse et d'ordonnée peut faire oublier qu'il s'agit avant tout d'un rapport.

Il ne faut pas oublier que la trigonométrie a fortement évolué avec l'avènement de la calculatrice. Ces machines électroniques ont rendu obsolète l'utilisation des tables trigonométriques, et avec elles, la réduction au premier quadrant basée sur les angles associés et les relations entre leurs nombres trigonométriques. Ces relations comme celles des angles opposés et celles des angles complémentaires interviennent encore dans le développement des formules trigonométriques.

La dernière partie de ce chapitre présente un questionnaire à la destination des élèves. Nous l'avons mis au point sur base des différentes analyses que nous avons réalisées. En effet, les différentes questions proposées reprennent un certain nombre d'éléments qui ont retenu notre attention. Son but est de nous permettre de cerner la façon avec laquelle les élèves comprennent les différentes notions propres à la trigonométrie pendant et à la fin de son apprentissage.

Ce mémoire ouvre la porte à quelques questions et nous invite à nous interroger sur l'utilité de voir les relations entre les nombres trigonométriques des angles associés qui ne sont pas utilisées dans le développement des formules trigonométriques. Nous pouvons aussi nous poser la question quant à l'utilité de voir ces relations à partir du moment où les démonstrations de ces formules ne sont pas abordées. De plus, avec l'apparition des nouvelles technologies telles que les ordinateurs, les tablettes ou encore autres smartphones, les notions propres à la trigonométrie ne sont-elles pas en voie de disparition ? Des calculateurs symboliques sont disponibles sur Internet. Ils permettent de simplifier des identités trigonométriques qui, auparavant, étaient traitées par des formules.

À la fin de ce travail, plusieurs perspectives s'offrent à nous. La première serait la distribution du questionnaire dans différentes classes. L'analyse des résultats permettrait d'avoir plus d'informations sur la façon avec laquelle les élèves appréhendent les concepts propres à la trigonométrie. Cette analyse serait par exemple l'occasion de voir les conséquences chez les élèves de définir le sinus et le cosinus comme des coordonnées.

Dans ce travail, nous avons essentiellement analysé des programmes et des manuels belges francophones. Une seconde perspective aurait été de voir ce qui est fait ailleurs. Nous pourrions, par exemple, analyser des programmes et des ouvrages français et ainsi faire des comparaisons avec ce qui est fait chez nous.

Une dernière perspective pourrait être la création d'une activité sur les tables trigonométriques et les machines à calculer. De nos jours, les élèves n'ont plus qu'à appuyer sur quelques touches pour connaître les valeurs trigonométriques de n'importe quel angle. Cette activité pourrait leur faire comprendre qu'avant les années septante, la calculatrice n'existait pas et qu'il fallait utiliser les tables. D'une part, nous pourrions aborder avec eux l'utilisation des tables et leur construction qui se base notamment sur les formules trigonométriques. D'autre part, cette activité serait aussi l'occasion d'aborder avec eux le fonctionnement de la calculatrice en évoquant, par exemple, l'algorithme *CORDIC*.

Bibliographie

[1] A. Adam, R. Bastin, F. Goossens, G. Halin et F. Lousberg : *Mathématisons 46 Manuel.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1983.

[2] A. Adam, F. Goossens et F. Lousberg : *Mathématique 2B.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1977.

[3] A. Adam, F. Goossens et F. Lousberg : *Mathématisons 53 Manuel.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1984.

[4] A. Adam, F. Goossens et F. Lousberg : *Mathématisons 55 Manuel.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1984.

[5] A. Adam, F. Goossens et F. Lousberg : *Mathématisons 57 Manuel.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1985.

[6] E. Boutriau, J. Boutriau et J. Lievens : *Savoir et savoir-faire en mathématique.* H. Dessain, Liège, 1977.

[7] E. Boutriau-Philippe, J. Boutriau et J. Lievens : *Savoir et savoir-faire en mathématique 4.* H. Dessain, Liège, 1994.

[8] C. Devalland : L'algorithme cordic. `http://cdeval.free.fr/IMG/pdf/cordic.pdf`. accès juin 2017.

[9] Fédération Wallonie-Bruxelles : Référentiels de base - présentation des programmes.

[10] L. Grégoire : De l'utilisation d'une règle à calcul. `http://tnerual.eriogerg.free.fr/utilisation_regle_calcul.pdf`. accès août 2017.

[11] S. Lorent et R. Lorent : *Mathématique M41.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1976.

[12] S. Lorent et R. Lorent : *Mathématique M53.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1985.

[13] S. Lorent et R. Lorent : *Mathématique M51.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1986.

[14] S. Lorent et R. Lorent : *Mathématique M52.* A. DeBoeck, Bruxelles, 1986.

[15] Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation direction générale de l'Organisation des Etudes : *Programme de Mathématique 4pér./sem. pour l'enseignement secondaire technique de transition (deuxième degré, quatrième année)*, 1983.

[16] Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation direction générale de l'Organisation des Etudes : *Programme de Mathématique (Option A à 7h/semaine) pour l'enseignement secondaire (troisième degré de transition, cinquième année)*, 1984.

[17] Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation direction générale de l'Organisation des Etudes : *Programme de Mathématiques 4 heures par semaine pour l'enseignement secondaire (troisième degré de transition, cinquième année)*, 1993.

[18] Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation direction générale de l'Organisation des Etudes : *Programme de Mathématiques 6 heures par semaine pour l'enseignement secondaire (troisième degré de transition, cinquième année)*, 1993.

[19] Ministère de l'éducation, de la recherche et de la formation direction générale de l'Organisation des Etudes : *Programme de Mathématiques pour l'enseignement secondaire (deuxième degré de transition, quatrième année) (Programme transitoire)*, 1994.

[20] M. Pierard et V. Henry : Trigonométrie : histoire et instruments. *Losanges*, (30):13 – 24, 9 2015.

[21] N.-J. Schons : *Traité de Trigonométrie rectiligne.* La Procure, Namur et Bruxelles, 6 édn, 1971.

[22] N.-J. Schons : *Tables de logarithmes à cinq décimales et autres tables.* La Procure, Namur et Bruxelles, 10 édn, 1972.

[23] C. Vassard et S. Colesse : Construction de tables trigométriques. http://assprouen.free.fr/fichiers/tables_trigonometriques/construction_tables.pdf. accès juin 2017.

[24] Wikipédia : Théorème de Ptolémée. http://https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Ptol%C3%A9m%C3%A9e. accès août 2017.

[25] S. Xhonneux : *Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie.* Thèse de doctorat, Université de Namur, 2011.

Annexe A

Tables trigonométriques

Cette partie fait référence au livre *Tables de Logarithmes et autres tables B*[1] *;* C[2]. Il fait partie de la collection N.-J. Schons et il contient :

- *Logarithmes des nombres entiers de 1 à 10 000 ;*
- *Logarithmes (division sexag.*[3] *et division centés.*[4]*) et valeurs naturelles des nombres trigonométriques ;*
- *Tables financières et Tables arithmétiques ;*
- *Fonctions exponentielles et hyperboliques.*

Après avoir expliqué comment arrondir un nombre décimal à sa deuxième décimale, le *Traité* rappelle que, dans le premier quadrant :

- *Le sinus, la tangente et leurs logarithmes* sont *des fonctions croissantes de l'arc* c'est-à-dire qu'elles *varient dans le même sens que l'arc* ;
- *Le cosinus, la cotangente et leurs logarithmes* sont *des fonctions décroissantes de l'arc* c'est-à-dire qu'elles *varient dans le sens inverse de l'arc.*

A.1 Tables des valeurs naturelles

La table considérée *donne les sinus, cosinus, tangentes, cotangentes de tous les arcs compris entre* 0° *et* 90° *de minute en minute.* La disposition de cette table *tient compte du fait que le sinus et le cosinus ainsi que la tangente et la cotangente de deux arcs complémentaires sont égaux.*

Afin d'expliquer l'utilisation de cette *table des valeurs naturelles*, deux problèmes sont solutionnés.

Le premier pose la question de comment *trouver les nombres trigonométriques d'un arc du premier quadrant.* Il est alors proposé de calculer $\sin 18^\circ 24' 41"$. Les valeurs les plus proches données par la table sont

$$\begin{aligned} \sin 18^\circ 24' &= 0.31565 \\ \sin 18^\circ 25' &= 0.31593. \end{aligned}$$

Le sinus recherché se trouve entre ces deux valeurs dont la différence, notée Δ, s'appelle la *différence tabulaire.* Dans cet exemple, $\Delta = 28$ *unités décimales du* 5° *ordre.*

1. B signifie que l'ouvrage est adapté aux cycles supérieurs des humanités (y compris les écoles normales) et l'enseignement technique, dénommés ≪ utilisateurs forts ≫des mathématiques
2. C signifie que l'ouvrage est adapté aux cycles supérieurs des humanités (y compris les écoles normales) et l'enseignement technique, dénommés ≪ utilisateurs faibles ≫des mathématiques
3. sexagésimale
4. centésimale

Afin de trouver *la correction* c'est-à-dire le nombre à ajouter à $\sin 18^\circ 24'$ pour avoir le sinus recherché, *on suppose que l'accroissement du sinus est proportionnel à l'accroissement de l'arc.* Cette correction est obtenue à partir de la règle de trois suivante

$$\begin{array}{ll} \text{l'arc croît de 60''} & \Rightarrow \text{le sinus croît de } \Delta = 28 \\ \text{l'arc croît de 41''} & \Rightarrow \text{le sinus croît de } \dfrac{41}{60} = 19.1 \end{array}$$

Il faut donc ajouter 19.1 *soit* 19 à la valeur de $\sin 18^\circ 24'$ pour obtenir que

$$\sin 18^\circ 24' 41'' = 0.31584.$$

Rechercher la valeur du cosinus d'un arc du premier quadrant se fait de manière analogue mis à part que la correction doit être retranchée au lieu d'être ajoutée. Cela est dû au fait que *le cosinus est une fonction décroissante par rapport aux arcs du premier quadrant.*

Le raisonnement qui vient d'être effectué est résumé sous la forme d'une règle qui est divisée en trois points :

1° *On supprime les secondes et on cherche le nombre trigonométrique ;*
2° *On calcule la correction ; celle-ci est égale au produit arrondi de la différence tabulaire par la fraction de minute égale aux secondes supprimées ;*
3° *S'il s'agit d'un sinus ou d'une tangente, on ajoute la correction ; on la retranche quand il s'agit d'un cosinus ou d'une cotangente.*

Le livre remarque que le calcul du cosinus d'un arc peut se faire soit directement ou soit en calculant le *sinus du complément.*

Le raisonnement qui a été effectué est *une interpolation par parties proportionnelles.* L'hypothèse qui a été formulée précédemment *revient à supposer que dans l'intervalle* $(18^\circ 24', 18^\circ 25')$ *le graphique de* $\sin x$ *est un segment rectiligne.* Une erreur est donc commise mais cette dernière est *ordinairement négligeable.*

Voici les causes qui peuvent entacher d'erreurs le calcul de, par exemple, $\sin 18^\circ 24' 41''$:

- Le nombre $0.31584 = \sin 18^\circ 24'$ est arrondi à la 5e décimale ;
- La différence tabulaire $\Delta = 28$ n'est pas la différence exacte entre $\sin 18^\circ 24'$ et $\sin 18^\circ 25'$;
- On calcule la correction par interpolation ;
- On arrondit la correction.

Néanmoins, *l'erreur totale est inférieure à une unité décimale du 5e ordre.*

Le second problème consiste à *trouver un arc x du premier quadrant connaissant un nombre trigonométrique de cet arc.* Pour le résoudre, il faut trouver le nombre trigonométrique dans la table.

Afin d'optimiser la recherche, il est, par exemple, dit que $\sin x < 0.70711;\ x < 45^\circ$ et que $\cos x < 0.70711;\ x > 45^\circ$. Cette remarque se justifie par deux éléments. Le premier est que

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.70711.$$

Le second élément est que la croissance de la fonction sinus est sur le premier quadrant et que la décroissance de la fonction cosinus sur ce même quadrant. Des remarques similaires sont faites pour la tangente et la cotangente. Deux cas de figures sont alors à envisager :

1. *Le nombre trigonométrique est dans les tables, on obtient immédiatement l'arc x ;*
2. Le nombre trigonométrique n'est pas dans les tables, il faut alors appliquer la règle suivante :

   1° *On cherche d'abord la valeur approchée de x à moins d'une minute par défaut. A cet effet, s'il s'agit d'un sinus ou d'une tangente, on prend le nombre trigonométrique immédiatement inférieur au nombre donné ; et le nombre trigonométrique immédiatement supérieur, s'il s'agit d'un cosinus ou d'une cotangente ;*

   2° *On calcule la correction et on l'ajoute à l'arc par défaut. La correction exprimée en secondes s'obtient en multipliant par 60 le quotient de la différence des nombres trigonométriques considérés par la différence tabulaire.*

En plus des quatre causes d'erreurs déjà évoquées, le livre ajoute une cinquième cause d'erreur. Comme le nombre trigonométrique est arrondi à sa 5e décimale, *il est affecté d'une erreur inférieure à la demi-unité décimale du 5e ordre.* L'erreur sur l'arc est alors entachée d'une erreur inférieure à $\frac{60"}{2\Delta}$. Dès lors, si on augmente le nombre trigonométrique de Δ unités décimales du 5e ordre, *l'arc augmente ou diminue de* 60".

Pour le sinus, *l'erreur totale sur l'arc est donc inférieure à* $\frac{60"}{2\Delta} + 0".5$. La différence tabulaire Δ va de 29 à 0 au fur et à mesure que l'arc se rapproche de 90°. La limite supérieure de l'erreur croît avec l'arc. Dès lors *un arc voisin de* 90° *est mal déterminé par son sinus et un arc voisin de* 0° *est mal déterminé par son cosinus.*

Pour la tangente, l'erreur causée par l'interpolation n'est *sensible qu'à partir de* $89°30'$. *L'erreur provenant des autres causes* reste inférieure à $\frac{60"}{2\Delta} + 0".5$. La différence tabulaire Δ a la particularité de croître indéfiniment à partir de 29. L'erreur sur l'arc est d'abord de 2.5" ; cette erreur décroit pour tendre vers 0.5" quand l'arc tend vers $89°30'$. Elle va ensuite croître à nouveau. Cela signifie alors *qu'un arc est mieux déterminé par sa tangente que par son sinus.*

A.2 Tables de logarithmes

Pour expliquer l'utilisation des tables de logarithmes, *deux problèmes fondamentaux* sont exposés. Pour chacun d'entre-eux, deux méthodes sont développées. L'une est réservée *aux arcs inférieurs à* 4° et *aux arc supérieurs à* 86°. L'autre s'applique à tous les autres arcs.

Le premier *problème fondamental* est *trouver le logarithme d'un nombre trigonométrique d'un arc donné du premier quadrant.* La méthode pour les arcs compris entre 4° et 86° est similaire à celle qui a été décrite pour le premier problème avec la table des valeurs naturelles.

Pour ce qui est de la seconde méthode, l'explication de celle-ci commence par le calcul du logarithme de différents nombres trigonométriques d'un arc α inférieur à 4° qui est exprimé en degrés. En posant

$$S = \frac{\sin\alpha}{\alpha} \text{ et } T = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha},$$

les égalités suivantes sont alors obtenues :

$$\begin{aligned} \log\sin\alpha &= \log S + \log\alpha, \\ \log\operatorname{tg}\alpha &= \log T + \log\alpha. \end{aligned}$$

Dès lors pour connaître $\log\sin\alpha$ et $\log\operatorname{tg}\alpha$, il suffit de connaître la valeur de $\log S$, $\log T$ et $\log\alpha$ avec α exprimé en seconde. Toutes ces informations sont contenues dans les tables. Une table est même dédiée à la conversion de l'arc de degrés en secondes. Le calcul du *logarithme d'un nombre trigonométrique d'un arc supérieur à* 86° se fait en prenant le complémentaire de l'arc. Cela permet d'avoir un arc inférieur à 4° et de pouvoir utiliser ce qui a été expliqué plus haut.

Les *erreurs sur les logarithmes* ont les mêmes causes que celles évoquées pour la tables des valeurs naturelles.

Le second *problème fondamental* consiste à *calculer un arc α du premier quadrant, connaissant le logarithme d'un nombre trigonométrique de cet arc.* Pour les arcs supérieurs à 4° et les arcs inférieurs à 86° le raisonnement est analogue à celui qui est effectué pour résoudre le second problème de la partie *table des valeurs naturelles.*

Pour expliquer la méthode utilisée pour les arcs inférieurs à 4°, un exemple chiffré est pris. Celui-ci demande de calculer l'arc x du premier quadrant dont $\log\operatorname{tg}x = 2.62598$. Les tables nous apportent deux informations :

- *L'arc x est compris entre* $2°25'$ *et* $2°26'$;
- $\log\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = \log T = 6.685833$.

Grâce à l'égalité $\log\operatorname{tg}\alpha = \log T + \log\alpha$, il est déduit que $\log x = 3.94015$ avec x exprimé en secondes. Une table permet de connaître la valeur de x. Une autre table peut faciliter la conversion de secondes en degrés.

Encore une fois, les causes des erreurs sur les arcs sont les mêmes que exposées précédemment. La conclusion dit que :

– *Un arc voisin* 90° *est mal déterminé par son sinus et un arc voisin de* 0° *est mal déterminé par son cosinus ;*
– *Un arc est mieux déterminé par sa tangente que par son sinus et son cosinus.*

Expressions logarithmiques

Une expression est logarithmique quand elle ne renferme ni le signe $+$*, ni le signe* $-$*, sauf pour indiquer des opérations que l'on peut effectuer immédiatement. Des exemples d'expressions logarithmiques et non logarithmiques illustrent cette définition :*

- $a \pm b$ est logarithmique alors que $a^2 \pm b^2$ ne l'est pas ;
- $\sin(\alpha + \beta)$ est logarithmique alors que $\sin \alpha + \cos \beta$ ne l'est pas.

Deux méthodes sont alors exposées afin de rendre des expressions, qui ne l'étaient pas logarithmiques. La première méthode *emploie des formules trigonométriques* tandis que la seconde *emploie des angles auxiliaires.* Plusieurs exemples de transformations d'expressions sont alors donnés.

A.3 Résolution des équations élémentaires et du système $\sin x = a, \ \cos x = a$

Dans cette partie, une méthode est donnée pour résoudre les équations élémentaires de la forme $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{cotg} x = a$. Cette méthode envisage deux cas de figures :

– Quand *a est positif*, il faut alors *déterminer la plus petite valeur positive α de x ;*
– Quand *a est négatif*, il faut procéder de la façon suivante :

1. Changer le signe des deux membres de l'équation en utilisant l'arc supplémentaire pour le cosinus et l'arc opposé pour les autres nombres trigonométriques ;
2. L'équation est alors transformée. *On cherche la plus petite valeur positive α' de x'* et *on écrit toutes les valeurs de l'arc x' en appliquant les formules* de l'inversion des fonctions circulaires. *Puis de l'égalité ainsi obtenue, on déduit les valeurs de x.*

Pour résoudre le système, il faut commencer par la résolution d'une des deux équations élémentaires qui le composent, par exemple $\cos x = a$. Un ensemble de solutions $x' = 2k\pi + \alpha$ et $x" = 2k\pi + \alpha$ est alors obtenu. Mais tous ces arcs ne vérifient pas la seconde équation. Ici $\sin x = a$. Il faut exclure ceux qui ne conviennent pas, cela se fait par observation du signe de $\sin \alpha$ et $\sin(-\alpha)$. En effet, il faut que les deux parties de la seconde égalité du système aient le même signe. Les arcs $x' = 2k\pi + \alpha$ sont acceptables si $\sin \alpha$ a le même signe que b.

A.4 Tables provenant de *Tables de Logarithmes et autres tables B* [22]

Cette section contient différentes tables provenant de *Tables de Logarithmes et autres tables B* [22]. L'objectif de cette section est de permettre au lecteur de voir l'allure qu'ont les différentes tables trigonométriques proposées dans ce livre. Sur les figures A.1 et A.2 se trouvent deux extraits de tables reprenant les valeurs des nombres trigonométriques de différents angles. La première utilise comme unité le degré tandis que la seconde utilise comme unité le grade. Les figures A.3 et A.4 sont des parties de tables de logarithmes. La première utilise le degré comme unité tandis que la seconde utilise le grade.

1 DEGRÉ

'	Sin.	Cos.	Tang.	Cotg.	
0	0,01 745	0,99 985	0,01 746	57,28 996	60
1	774	984	775	56,35 059	59
2	803	984	804	55,44 152	58
3	832	983	833	54,56 130	57
4	862	983	862	53,70 859	56
5	891	982	891	52,88 211	55
6	920	982	920	52,08 067	54
7	949	981	949	51,30 316	53
8	0,01 978	980	0,01 978	50,54 851	52
9	0,02 007	980	0,02 007	49,81 573	51
10	0,02 036	0,99 979	0,02 036	49,10 388	50
11	065	979	066	48,41 208	49
12	094	978	095	47,73 950	48
13	123	977	124	47,08 534	47
14	152	977	153	46,44 886	46
15	181	976	182	45,82 935	45
16	211	976	211	45,22 614	44
17	240	975	240	44,63 860	43
18	269	974	269	44,06 611	42
19	298	974	298	43,50 812	41
20	0,02 327	0,99 973	0,02 328	42,96 408	40
21	356	972	357	42,43 346	39
22	385	972	386	41,91 579	38
23	414	971	415	41,41 059	37
24	443	970	444	40,91 741	36
25	472	969	473	40,43 584	35
26	501	969	502	39,96 546	34
27	530	968	531	39,50 589	33
28	560	967	560	39,05 677	32
29	589	966	589	38,61 774	31
30	0,02 618	0,99 966	0,02 619	38,18 846	30
31	647	965	648	37,76 861	29
32	676	964	677	37,35 789	28
33	705	963	706	36,95 600	27
34	734	963	735	36,56 266	26
35	763	962	764	36,17 760	25
36	792	961	793	35,80 055	24
37	821	960	822	35,43 128	23
38	850	959	851	35,06 955	22
39	879	959	881	34,71 512	21
40	0,02 908	0,99 958	0,02 910	34,36 777	20
41	938	957	939	34,02 730	19
42	967	956	968	33,69 351	18
43	0,02 996	955	0,02 997	33,36 619	17
44	0,03 025	954	0,03 026	33,04 517	16
45	054	953	055	32,73 026	15
46	083	952	084	32,42 129	14
47	112	952	114	32,11 810	13
48	141	951	143	31,82 052	12
49	170	950	172	31,52 839	11
50	0,03 199	0,99 949	0,03 201	31,24 158	10
51	228	948	230	30,95 993	9
52	257	947	259	30,68 331	8
53	286	946	288	30,41 158	7
54	316	945	317	30,14 462	6
55	345	944	346	29,88 230	5
56	374	943	376	29,62 450	4
57	403	942	405	29,37 111	3
58	432	941	434	29,12 200	2
59	461	940	463	28,87 709	1
60	0,03 490	0,99 939	0,03 492	28,63 625	0
	Cos.	Sin.	Cotg.	Tang.	'

88 DEGRÉS

2 DEGRÉS

'	Sin.	Cos.	Tang.	Cotg.	
0	0,03 490	0,99 939	0,03 492	28,63 625	60
1	519	938	521	28,39 940	59
2	548	937	550	28,16 642	58
3	577	936	579	27,93 723	57
4	606	935	609	27,71 174	56
5	635	934	638	27,48 985	55
6	664	933	667	27,27 149	54
7	693	932	696	27,05 656	53
8	723	931	725	26,84 498	52
9	752	930	754	26,63 669	51
10	0,03 781	0,99 929	0,03 783	26,43 160	50
11	810	927	812	26,22 964	49
12	839	926	842	26,03 074	48
13	868	925	871	25,83 482	47
14	897	924	900	25,64 183	46
15	926	923	929	25,45 170	45
16	955	922	958	25,26 436	44
17	0,03 984	921	0,03 987	25,07 976	43
18	0,04 013	919	0,04 016	24,89 783	42
19	042	918	046	24,71 851	41
20	0,04 071	0,99 917	0,04 075	24,54 176	40
21	100	916	104	24,36 751	39
22	129	915	133	24,19 571	38
23	159	913	162	24,02 632	37
24	188	912	191	23,85 928	36
25	217	911	220	23,69 454	35
26	246	910	250	23,53 205	34
27	275	909	279	23,37 178	33
28	304	907	308	23,21 367	32
29	333	906	337	23,05 768	31
30	0,04 362	0,99 905	0,04 366	22,90 377	30
31	391	904	395	22,75 189	29
32	420	902	424	22,60 201	28
33	449	901	454	22,45 410	27
34	478	900	483	22,30 810	26
35	507	898	512	22,16 398	25
36	536	897	541	22,02 171	24
37	565	896	570	21,88 125	23
38	594	894	599	21,74 257	22
39	623	893	628	21,60 563	21
40	0,04 653	0,99 892	0,04 658	21,47 040	20
41	682	890	687	21,33 685	19
42	711	889	716	21,20 495	18
43	740	888	745	21,07 466	17
44	769	886	774	20,94 597	16
45	798	885	803	20,81 883	15
46	827	883	833	20,69 322	14
47	856	882	862	20,56 911	13
48	885	881	891	20,44 649	12
49	914	879	920	20,32 531	11
50	0,04 943	0,99 878	0,04 949	20,20 555	10
51	0,04 972	876	0,04 978	20,08 720	9
52	0,05 001	875	0,05 007	19,97 022	8
53	030	873	037	19,85 459	7
54	059	872	066	19,74 029	6
55	088	870	095	19,62 730	5
56	117	869	124	19,51 558	4
57	146	867	153	19,40 513	3
58	175	866	182	19,29 592	2
59	205	864	212	19,18 793	1
60	0,05 234	0,99 863	0,05 241	19,08 114	0
	Cos.	Sin.	Cotg.	Tang.	'

87 DEGRÉS

FIGURE A.1 – Tables des valeurs naturelles en degré (extrait de [22])

49 GRADES

′	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	
00	$\bar{1}$,84 255	$\bar{1}$,98 635	0,01 365	$\bar{1}$,85 620	**100**
01	263	649	351	613	99
02	270	663	337	607	98
03	277	676	324	600	97
04	284	690	310	594	96
05	291	704	296	587	95
06	298	717	283	580	94
07	305	731	269	574	93
08	312	745	255	567	92
09	319	758	242	561	91
10	$\bar{1}$,84 326	$\bar{1}$,98 772	0,01 228	$\bar{1}$,85 554	**90**
11	333	786	214	547	89
12	340	799	201	541	88
13	347	813	187	534	87
14	354	826	174	527	86
15	361	840	160	521	85
16	368	854	146	514	84
17	375	867	133	507	83
18	382	881	119	501	82
19	389	895	105	494	81
20	$\bar{1}$,84 396	$\bar{1}$,98 908	0,01 092	$\bar{1}$,85 487	**80**
21	403	922	078	481	79
22	410	936	064	474	78
23	417	949	051	467	77
24	424	963	037	461	76
25	431	977	023	454	75
26	438	$\bar{1}$,98 990	0,01 010	447	74
27	445	$\bar{1}$,99 004	0,00 996	441	73
28	452	018	982	434	72
29	459	031	969	427	71
30	$\bar{1}$,84 466	$\bar{1}$,99 045	0,00 955	$\bar{1}$,85 421	**70**
31	473	059	941	414	69
32	480	072	928	407	68
33	487	086	914	401	67
34	494	099	901	394	66
35	501	113	887	387	65
36	507	127	873	381	64
37	514	140	860	374	63
38	521	154	846	367	62
39	528	168	832	361	61
40	$\bar{1}$,84 535	$\bar{1}$,99 181	0,00 819	$\bar{1}$,85 354	**60**
41	542	195	805	347	59
42	549	209	791	341	58
43	556	222	778	334	57
44	563	236	764	327	56
45	570	250	750	320	55
46	577	263	737	314	54
47	584	277	723	307	53
48	591	290	710	300	52
49	598	304	696	294	51
50	$\bar{1}$,84 605	$\bar{1}$,99 318	0,00 682	$\bar{1}$,85 287	**50**
	Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	′

′	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	
50	$\bar{1}$,84 605	$\bar{1}$,99 318	0,00 682	$\bar{1}$,85 287	**50**
51	612	331	669	280	49
52	619	345	655	273	48
53	625	359	641	267	47
54	632	372	628	260	46
55	639	386	614	253	45
56	646	400	600	247	44
57	653	413	587	240	43
58	660	427	573	233	42
59	667	441	559	226	41
60	$\bar{1}$,84 674	$\bar{1}$,99 454	0,00 546	$\bar{1}$,85 220	**40**
61	681	468	532	213	39
62	688	482	518	206	38
63	695	495	505	199	37
64	702	509	491	193	36
65	708	522	478	186	35
66	715	536	464	179	34
67	722	550	450	172	33
68	729	563	437	166	32
69	736	577	423	159	31
70	$\bar{1}$,84 743	$\bar{1}$,99 591	0,00 409	$\bar{1}$,85 152	**30**
71	750	604	396	145	29
72	757	618	382	139	28
73	764	632	368	132	27
74	770	645	355	125	26
75	777	659	341	118	25
76	784	673	327	112	24
77	791	686	314	105	23
78	798	700	300	098	22
79	805	713	287	091	21
80	$\bar{1}$,84 812	$\bar{1}$,99 727	0,00 273	$\bar{1}$,85 085	**20**
81	818	741	259	078	19
82	825	754	246	071	18
83	832	768	232	064	17
84	839	782	218	057	16
85	846	795	205	051	15
86	853	809	191	044	14
87	860	823	177	037	13
88	866	836	164	030	12
89	873	850	150	023	11
90	$\bar{1}$,84 880	$\bar{1}$,99 864	0,00 136	$\bar{1}$,85 017	**10**
91	887	877	123	010	09
92	894	891	109	$\bar{1}$,85 003	08
93	901	904	096	$\bar{1}$,84 996	07
94	908	918	082	989	06
95	914	932	068	983	05
96	921	945	055	976	04
97	928	959	041	969	03
98	935	973	027	962	02
99	942	$\bar{1}$,99 986	014	955	01
100	$\bar{1}$,84 949	0,00 000	0,00 000	$\bar{1}$,84 949	**00**
	Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	′

50 GRADES

FIGURE A.2 – Tables des valeurs naturelles en grade (extrait de [22])

1 DEGRÉ Log S = $\bar{6}$,68...; Log T = $\bar{6}$,68...

′	″	S	T	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	
0	3600	555 3	561 9	$\bar{2}$,24 186	$\bar{2}$,24 192	1,75 808	$\bar{1}$,99 993	**60**
1	3660	555 2	562 0	24 903	24 910	75 090	993	59
2	3720	555 1	562 2	25 609	25 616	74 384	993	58
3	3780	555 1	562 3	26 304	26 312	73 688	993	57
4	3840	555 0	562 5	26 988	26 996	73 004	992	56
5	3900	554 9	562 7	27 661	27 669	72 331	992	55
6	3960	554 8	562 8	28 324	28 332	71 668	992	54
7	4020	554 7	563 0	28 977	28 986	71 014	992	53
8	4080	554 7	563 2	29 621	29 629	70 371	992	52
9	4140	554 6	563 3	30 255	30 263	69 737	991	51
10	4200	554 5	563 5	$\bar{2}$,30 879	$\bar{2}$,30 888	1,69 112	$\bar{1}$,99 991	**50**
11	4260	554 4	563 7	31 495	31 505	68 495	991	49
12	4320	554 3	563 8	32 103	32 112	67 888	990	48
13	4380	554 2	564 0	32 702	32 711	67 289	990	47
14	4440	554 1	564 2	33 292	33 302	66 698	990	46
15	4500	554 0	564 4	33 875	33 886	66 114	990	45
16	4560	553 9	564 6	34 450	34 461	65 539	989	44
17	4620	553 9	564 8	35 018	35 029	64 971	989	43
18	4680	553 8	564 9	35 578	35 590	64 410	989	42
19	4740	553 7	565 1	36 131	36 143	63 857	989	41
20	4800	553 6	565 3	$\bar{2}$,36 678	$\bar{2}$,36 689	1,63 311	$\bar{1}$,99 988	**40**
21	4860	553 5	565 5	37 217	37 229	62 771	988	39
22	4920	553 4	565 7	37 750	37 762	62 238	988	38
23	4980	553 3	565 9	38 276	38 289	61 711	987	37
24	5040	553 2	566 1	38 796	38 809	61 191	987	36
25	5100	553 1	566 3	39 310	39 323	60 677	987	35
26	5160	553 0	566 5	39 818	39 832	60 168	986	34
27	5220	552 9	566 8	40 320	40 334	59 666	986	33
28	5280	552 7	567 0	40 816	40 830	59 170	986	32
29	5340	552 6	567 2	41 307	41 321	58 679	985	31
30	5400	552 5	567 4	$\bar{2}$,41 792	$\bar{2}$,41 807	1,58 193	$\bar{1}$,99 985	**30**
31	5460	552 4	567 6	42 272	42 287	57 713	985	29
32	5520	552 3	567 9	42 746	42 762	57 238	984	28
33	5580	552 2	568 1	43 216	43 232	56 768	984	27
34	5640	552 1	568 3	43 680	43 696	56 304	984	26
35	5700	552 0	568 5	44 139	44 156	55 844	983	25
36	5760	551 8	568 8	44 594	44 611	55 389	983	24
37	5820	551 7	569 0	45 044	45 061	54 939	983	23
38	5880	551 6	569 3	45 489	45 507	54 493	982	22
39	5940	551 5	569 5	45 930	45 948	54 052	982	21
40	6000	551 4	569 7	$\bar{2}$,46 366	$\bar{2}$,46 385	1,53 615	$\bar{1}$,99 982	**20**
41	6060	551 2	570 0	46 799	46 817	53 183	981	19
42	6120	551 1	570 2	47 226	47 245	52 755	981	18
43	6180	551 0	570 5	47 650	47 669	52 331	981	17
44	6240	550 9	570 7	48 069	48 089	51 911	980	16
45	6300	550 7	571 0	48 485	48 505	51 495	980	15
46	6360	550 6	571 3	48 896	48 917	51 083	979	14
47	6420	550 5	571 5	49 304	49 325	50 675	979	13
48	6480	550 3	571 8	49 708	49 729	50 271	979	12
49	6540	550 2	572 0	50 108	50 130	49 870	978	11
50	6600	550 1	572 3	$\bar{2}$,50 504	$\bar{2}$,50 527	1,49 473	$\bar{1}$,99 978	**10**
51	6660	549 9	572 6	50 897	50 920	49 080	977	9
52	6720	549 8	572 9	51 287	51 310	48 690	977	8
53	6780	549 7	573 1	51 673	51 696	48 304	977	7
54	6840	549 5	573 4	52 055	52 079	47 921	976	6
55	6900	549 4	573 7	52 434	52 459	47 541	976	5
56	6960	549 2	574 0	52 810	52 835	47 165	975	4
57	7020	549 1	574 3	53 183	53 208	46 792	975	3
58	7080	549 0	574 5	53 552	53 578	46 422	974	2
59	7140	548 8	574 8	53 919	53 945	46 055	974	1
60	7200	548 7	575 1	$\bar{2}$,54 282	$\bar{2}$,54 308	1,45 692	$\bar{1}$,99 974	**0**
	″	S	T	Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	′

— 29 — **88 DEGRÉS**

FIGURE A.3 – Tables des logarithmes des nombres trigonométriques en degré (extrait de [22])

0 GRADE Log S = $\bar{4}$,19...; Log T = $\bar{4}$,19...

'	S	T	Sin.	Tang.	Cotg.	Cos.	
00	612 0	612 0	Inf. nég.	Inf. nég.	Inf. pos.	0,00 000	**100**
01	612 0	612 0	$\bar{4}$,19 612	$\bar{4}$,19 612	3,80 388	000	99
02	612 0	612 0	49 715	49 715	50 285	000	98
03	612 0	612 0	67 324	67 324	32 676	000	97
04	612 0	612 0	79 818	79 818	20 182	000	96
05	612 0	612 0	89 509	89 509	10 491	000	95
06	612 0	612 0	$\bar{4}$,97 427	$\bar{4}$,97 427	3,02 573	000	94
07	612 0	612 0	$\bar{3}$,04 122	$\bar{3}$,04 122	2,95 878	000	93
08	612 0	612 0	09 921	09 921	90 079	000	92
09	612 0	612 0	15 036	15 036	84 964	000	91
10	612 0	612 0	$\bar{3}$,19 612	$\bar{3}$,19 612	2,80 388	0,00 000	**90**
11	612 0	612 0	23 751	23 751	76 249	000	89
12	612 0	612 0	27 530	27 530	72 470	000	88
13	612 0	612 0	31 006	31 006	68 994	000	87
14	612 0	612 1	34 225	34 225	65 775	000	86
15	611 9	612 1	37 221	37 221	62 779	000	85
16	611 9	612 1	40 024	40 024	59 976	000	84
17	611 9	612 1	42 657	42 657	57 343	000	83
18	611 9	612 1	45 139	45 139	54 861	000	82
19	611 9	612 1	47 487	47 487	52 513	000	81
20	611 9	612 1	$\bar{3}$,49 715	$\bar{3}$,49 715	2,50 285	0,00 000	**80**
21	611 9	612 1	51 834	51 834	48 166	000	79
22	611 9	612 2	53 854	53 854	46 146	000	78
23	611 9	612 2	55 785	55 785	44 215	000	77
24	611 9	612 2	57 633	57 633	42 367	000	76
25	611 9	612 2	59 406	59 406	40 594	000	75
26	611 9	612 2	61 109	61 110	38 890	000	74
27	611 9	612 2	62 748	62 749	37 251	000	73
28	611 8	612 3	64 328	64 328	35 672	000	72
29	611 8	612 3	65 852	65 852	34 148	000	71
30	611 8	612 3	$\bar{3}$,67 324	$\bar{3}$,67 324	2,32 676	0,00 000	**70**
31	611 8	612 3	68 748	68 749	31 251	$\bar{1}$,99 999	69
32	611 8	612 4	70 127	70 127	29 873	999	68
33	611 8	612 4	71 463	71 464	28 536	999	67
34	611 8	612 4	72 760	72 760	27 240	999	66
35	611 8	612 4	74 019	74 019	25 981	999	65
36	611 8	612 5	75 242	75 243	24 757	999	64
37	611 7	612 5	76 432	76 433	23 567	999	63
38	611 7	612 5	77 590	77 591	22 409	999	62
39	611 7	612 5	78 718	78 719	21 281	999	61
40	611 7	612 6	$\bar{3}$,79 818	$\bar{3}$,79 819	2,20 181	$\bar{1}$,99 999	**60**
41	611 7	612 6	80 890	80 891	19 109	999	59
42	611 7	612 6	81 937	81 938	18 062	999	58
43	611 7	612 6	82 959	82 959	17 041	999	57
44	611 6	612 7	83 957	83 958	16 042	999	56
45	611 6	612 7	84 933	84 934	15 066	999	55
46	611 6	612 7	85 887	85 889	14 111	999	54
47	611 6	612 8	86 821	86 823	13 177	999	53
48	611 6	612 8	87 736	87 737	12 263	999	52
49	611 6	612 8	88 631	88 632	11 368	999	51
50	611 5	612 9	$\bar{3}$,89 509	$\bar{3}$,89 510	2,10 490	$\bar{1}$,99 999	**50**
	S	T	Cos.	Cotg.	Tang.	Sin.	'

99 GRADES

FIGURE A.4 – Tables des logarithmes des nombres trigonométriques en grade (extrait de [22])

Annexe B

Les équations et les inéquations

B.1 Traité de Trigonométrie rectiligne

Inversion de fonction trigonométrique

Dans le *Traité*, cette partie est présentée de la façon suivante : *À un arc donné ne correspond qu'un seul nombre trigonométrique de chaque espèce. Nous allons montrer qu'il existe une infinité d'arcs correspondant à un nombre trigonométrique donné ; chercher ces arcs, c'est faire l'inversion du nombre trigonométrique.*

En premier lieu, le livre s'intéresse à la recherche des *arcs ayant un sinus donné* en utilisant l'équation

$$\sin x = a \quad \text{avec } |a| \leq 1.$$ [1]

Cette recherche s'accompagne de la figure B.1 sur laquelle la mesure de $\overrightarrow{OQ}$ vaut a. Deux cas sont envisagés. Si $|a| < 1$, alors la parallèle à $A'A$ passant par le point Q intercepte le cercle en deux points M et M' qui sont les extrémités des arcs recherchés.

Si α est l'un des ces arcs, ils sont tous donnés par les formules

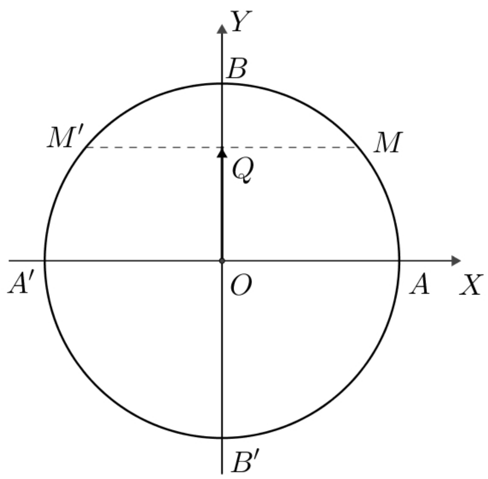


FIGURE B.1 – Illustration de la recherche des *arcs ayant un sinus donné* (inspiré de [21])

$$x = \alpha + 2k\pi \quad \text{et} \quad x = \pi - \alpha + 2k\pi.$$

1. Cette notation est étonnante car la lettre a était précédemment dévolue à la notation des arcs.

Si $a = \pm 1$, la parallèle à $A'A$ passant par le point Q *est tangente au cercle en* $B'B$ *; les deux formules précédentes se réduisent chaque fois à une seule*

$$\begin{array}{ll} \text{si } a = 1 & x = (4k+1)\dfrac{\pi}{2} \\ \text{si } a = -1 & x = (4k+3)\dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

La recherche *des arcs ayant un cosinus donné* est formulée par $\cos x = b$ avec $|b| \leq 1$. Cette recherche se fait de la même façon que la précédente et montre que *si* α *est l'un des arcs demandés, ils sont tous donnés par la formule*

$$x = \pm\alpha + 2k\pi.$$

$\operatorname{tg} x = c$ et $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{c}$ formalisent *la recherche des arcs ayant une tangente donnée ou une cotangente donnée*. Par un raisonnement semblable à ce qui a été effectué précédemment, *on montre alors que si* α *est l'un des arcs demandés, ils sont tous donnés par la formule*

$$x = \alpha + k\pi.$$

Ensuite avec les formules trouvées, le *Traité* propose, en guise d'exemple, la résolution d'équations de la forme $\sin x = a$, $\cos x = b$ et $\operatorname{tg} x = c$. Le *Traité* s'intéresse aux solutions d'*équations remarquables* qui sont de la forme

$$\sin x \text{ ou } \cos x = \pm 1 \text{ et } \sin x \text{ ou } \cos x \text{ ou } \operatorname{tg} x = 0.$$

Leurs solutions sont données *en radians et l'extrémité des arcs trouvés* sont repérés sur la figure B.1. Les trois théorèmes suivants :

I Si $\sin x = \sin y$, *on a* $x = 2k\pi + y$ *ou* $x = 2k\pi + \pi - y$, *et réciproquement ;*

II Si $\cos x = \cos y$, *on a* $x = 2k\pi \pm y$, *et réciproquement ;*

III Si $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ *(ou si* $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} y$*), on a* $x = k\pi + y$, *et réciproquement.*

sont présentés et démontrés. Dans une remarque concernant le théorème I, il est précisé que *pour l'ordinaire, l'équation* $\sin x = \sin y$ *n'entraine pas* $x = y$. Cette implication serait vraie *si* x *et* y *faisaient partie d'un même intervalle où le sinus ne prend qu'une seule fois les valeurs qu'il peut prendre* comme par exemple

$$\textit{si } x \in [0^\circ, 90^\circ],\ \sin x = \sin 60^\circ \Rightarrow x = 60^\circ.$$

Ces théorèmes peuvent servir *pour résoudre certaines équations trigonométriques élémentaires.* En guise d'exemples, les résolutions des équations

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin(x - 60^\circ) \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 3x &= 0 \end{aligned}$$

sont proposées.

Équations

Afin d'introduire la méthode générale de résolution des équations à une inconnue, l'équation

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x}$$

est résolue de deux façons différentes. La première façon consiste à remplacer $1 + \operatorname{tg}^2 x$ par $\frac{1}{\cos^2 x}$. La seconde consiste à *prendre* $\operatorname{tg} x$ *pour inconnue auxiliaire et remplacer* $\cos x$ *en fonction de* $\operatorname{tg} x$*.* Une remarque précise que la première méthode est préférable à la seconde car elle permet d'éviter les substitutions irrationnelles.

Ensuite, les trois étapes de la *méthode générale de résolution* sont présentées :

1. Transformer l'équation afin qu'elle ne contienne *qu'un seul nombre trigonométrique d'un seul arc inconnu* considéré comme *l'inconnue auxiliaire*. L'équation ainsi obtenue est *une équation algébrique à une inconnue ;*
2. Résoudre l'équation *par rapport à l'inconnue auxiliaire* et discuter les racines selon *les limites entre lesquelles peut varier le nombre trigonométrique ;*
3. *Chaque racine acceptable fournit une équation élémentaire* qui peut être résolue.

Plusieurs remarques au sujet de cette *méthode générale* sont formulées. En voici quelques-unes :

- *L'inconnue auxiliaire n'est pas nécessairement un nombre trigonométrique de l'arc inconnu x ;*
- *Les principes d'équivalence* comme la règle du produit nul *peuvent inspirer des artifices* qui permettent *des solutions plus rapides ;*
- Des mises en garde au sujet de la division par zéro, la substitution irrationnelle ou encore la suppression de solutions dues à l'utilisation de *formules qui ne sont pas toujours applicables* sont formulées.

Le *Traité* s'intéresse plus particulièrement à la résolution d'équations contenant du sinus et du cosinus. *Deux méthodes générales* sont d'abord proposées. La première consiste à remplacer $\sin x$ *et* $\cos x$ en posant $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ et à résoudre l'*équation rationnelle en t* ainsi obtenue. La seconde méthode consiste à adjoindre l'égalité

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

à l'équation de départ afin d'obtenir un système de deux équations dont les inconnues sont $\sin x$ et $\cos x$. Dans certains cas, ce système peut être directement résolu. *Dans d'autres cas, il est préférable de commencer par en déduire deux des expressions suivantes* $\sin x + \cos x,\ \sin x - \cos x,\ \sin x \cos x.$

Le *Traité* évoque aussi la façon de résoudre des équations en sinus et cosinus ayant une forme particulière. Pour résoudre les *équations homogènes* qui sont de la forme

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0,$$

il faut prendre $\operatorname{tg} x$ *comme inconnue auxiliaire.* De plus, pour ce type d'équation, trois cas de figure sont envisagés selon que $a \neq 0$, que $a = 0$ ou que $a = b = 0$. Trois méthodes sont données pour résoudre des *équations symétriques.* Il s'agit d'équations qui ont la particularité de ne pas changer *si l'on permute* $\sin x$ *et* $\cos x$.
Dans le *Traité*, trois méthodes pour résoudre les équations de la forme $a \cos x + b \sin x = c$ avec $a, b, c \neq 0$ sont exposées. La première consiste à remplacer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Pour réaliser la seconde méthode, il faut diviser *les deux membres de l'équation proposée par a* afin d'obtenir

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a}.$$

Ensuite, il faut poser $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$. La troisième méthode consiste à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} a \cos x + b \sin x = c \\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{cases}$$

En isolant $\cos(x)$ dans la première égalité du système et en plaçant cela dans la seconde égalité, une équation du second degré dont l'inconnue est $\sin x$ est ainsi obtenue. En résolvant cette dernière, il y a moyen d'exprimer $\sin x$ en fonction de a, b et c.

Inéquations

Les premières inéquations à être considérées sont les inéquations dites *élémentaires.* Il s'agit d'inéquations *d'une de ces formes :*

$$\begin{array}{rclcrcl} \sin x & \lesseqgtr & a & \qquad\qquad & \cos x & \lesseqgtr & a \\ \operatorname{tg} x & \lesseqgtr & a & & \operatorname{cotg} x & \lesseqgtr & a \end{array}$$

Pour résoudre les inéquations contenant du sinus ou du cosinus, il faut trouver les solutions sur un intervalle d'étendue 2π et puis ajouter $2k\pi$ aux solutions obtenues. Pour résoudre celles contenant la tangente ou la cotangente, les solutions sont, cette fois, recherchées sur un intervalle d'étendue π et ensuite $k\pi$ est ajouté aux solutions trouvées.

Afin d'illustrer cette méthode, les trois inéquations

$$\begin{array}{rcl} \sin x & < & 0.5 \\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) & > & \frac{-1}{2} \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} & < & \frac{-1}{2} \end{array}$$

sont résolues. Les trois résolutions sont accompagnées d'une illustration. Le raisonnement étant sensiblement le même dans les trois cas, nous n'allons détailler que la résolution de la première inéquation.

Sur la figure B.1 de la page 91, le vecteur $\overrightarrow{OQ}$, dont la mesure vaut 0.5, est représenté. La parallèle à $A'A$ passant par Q est tracée. Celle-ci intercepte le cercle trigonométrique en M et M'. *Les arcs α seront déterminés sur l'arc $M'B'M$. Les abscisses curvilignes de M' et M sont $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{13\pi}{6}$. Par la suite, si α est un arc quelconque du même intervalle terminé sur l'arc $M'B'M$, on a $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{13\pi}{6}$. On a donc $x = 2k\pi + \alpha$ avec $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{13\pi}{6}$.*
La résolution des *autres inéquations* se fait en se *ramenant à une ou plusieurs inéquations élémentaires.* En guise d'exemples, les inéquations suivantes

$$\begin{array}{rcl} 2\cos^2 x - 5\sin x + 1 & > & 0 \\ \sin 2x + \cos 2x & > & \cos 135^\circ \\ 3\cos x + \sin x - 1 & < & 0 \end{array}$$

sont résolues en utilisant cette méthode.

B.2 Équations dans *M41 mathématique (De Boeck)*

La partie consacrée aux *équations trigonométriques* commence par la définition suivante : *une équation trigonométrique à une inconnue est une équation où l'inconnue intervient dans l'expression d'un sinus, d'un cosinus, d'une tangente (d'une cotangente).* Ensuite une méthode de résolution d'*équations fondamentales* est donnée. Ces équations sont de la forme

$$\sin x = m, \cos x = m \text{ ou } \operatorname{tg} x = m.$$

Finalement des équations comme

$$\sin 2x = -0.5\ ,\ 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0 \text{ et } \sin x + 3\cos x = 1$$

sont résolues en guise d'exemples. La philosophie du manuel pour résoudre n'importe quelles équations trigonométriques est de se ramener à une *équation fondamentale.*

B.3 Équations dans *Mathématique 2B (De Boeck)*

Le manuel traite dans un premier temps des *équations élémentaires.* Il s'agit des *équations en sinus, équations en cosinus et équations en tangente.* Pour chacune d'entre-elles, la méthode de résolution de deux cas est abordée. Par exemple pour le sinus, ces deux cas sont :

1^e *cas* $\sin x = \sin a$;

2^e *cas* $\sin x = p$.

Les cas des deux autres formes d'équations élémentaires sont similaires.

Dans un deuxième temps, les *équations quelconques* sont traitées. La résolution de ces équations part de la philosophie que *toute équation trigonométrique doit se ramener à une équation élémentaire équivalente ou à une famille d'équations élémentaires dont la réunion est équivalente à l'équation proposée.*

De plus, selon ce manuel *il n'est pas possible de classifier les équations trigonométriques.* Il propose alors *quelques principes de résolution* comme *transformer l'équation donnée en une équation équivalente qui ne renferme qu'un seul nombre trigonométrique d'un seul angle* ou *se ramener à une équation de la forme* $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = 0$. Il formule une série de remarques de bonne résolution comme *ne jamais diviser les deux membres d'une équation par un facteur commun renfermant l'inconnue.*

Finalement, plusieurs équations trigonométriques sont résolues en guise d'exemples.

B.4 Équations dans *Mathématisons 46 (Manuel) (De Boeck)*

Le manuel propose aux élèves des méthodes pour résoudre des équations trigonométriques à une seule inconnue avec l'aide de la calculatrice. Ces équations sont du type $\sin ax = b$, $\cos ax = b$ ou $\operatorname{tg} ax = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Mais dans les exercices, on propose aussi des équations comme par exemple

$$sin(2x - \pi) = \cos 3x.$$

Après ces méthodes de résolution d'équations, les auteurs définissent le produit scalaire. Grâce à un raisonnement balisé avec des questions, ils font aussi découvrir aux élèves deux propositions sur les droites perpendiculaires et leurs équations cartésiennes.

B.5 Équations et inéquations dans *Mathématisons (53,55,57) (Manuels)(De Boeck)*

Équations

La façon d'envisager la résolution des équations trigonométriques dans *Mathématisons 53* (1984) est presque entièrement similaire à celle du *Mathématisons 55* (1985). Ils font la distinction entre trois types d'équations trigonométriques.

Le premier type concerne les équations de la forme $\sin x = \sin a$; $\cos x = \cos a$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Ce type est divisé en trois sous-points. Peu importe la fonction trigonométrique envisagée, ces sous-points sont identiques. Nous avons donc choisi de développer les trois sous-points concernant le sinus pour ne pas être redondant. Le premier sous-point est appelé *angles ayant le même sinus.* Le second concerne les *réels ayant le même sinus* et aboutit à l'équivalence

$$\forall\ a, b \in \mathbb{R}\ :\ \sin a = \sin b \Leftrightarrow a = b + 2k\pi\ ou\ a = \pi - b + 2k\pi.$$

Le dernier sous-point aborde l'*équation au sinus* pour donner l'équivalence suivante

$$\sin x = \sin a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi ou x = \pi - a + 2k\pi.$$

Le second type propose une méthode de résolution pour les équations de la forme $\sin x = t$, $\cos x = t$, $\operatorname{tg} x = t$ $(t \in \mathbb{R})$.

Le troisième et dernier type traite des *autres équations* c'est-à-dire toutes les équations n'appartenant pas à un des deux types précédents. Il y a une différence entre les deux manuels. Pour le cours de cinq heures par semaine, les auteurs proposent de *se ramener :*

- *Soit à un des trois types d'équations élémentaires ;*
- *Soit à une équation en* $\sin x$ *uniquement* ($\cos x$ *uniquement* - $\operatorname{tg} x$ *uniquement) que l'on résout par une méthode algébrique.*

Pour le cours de trois heures par semaine, les auteurs ne donnent que la première alternative.

La résolution d'équation est traitée différemment dans *Mathématisons 57.* Cette partie se trouve dans le chapitre *fonctions circulaires et cyclométriques.* Au cours d'un rappel, la façon de résoudre des *équations élémentaires* est expliquée. Ces *équations élémentaires* ont la même forme que les équations du premier type des deux autres livres. Elles ont donc la forme

$$\sin x = \sin a;\ \cos x = \cos a;\ \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a.$$

Par la suite, trois méthodes pour résoudre différents types d'équations vont être développées. La première méthode est pour les *équations du type ≪ produit de facteurs égal à zéro ≫*. Il s'agit d'*équations qui, après factorisation, se ramènent à zéro.* C'est-à-dire des équations qui *après factorisation ont la forme* $f(x).g(x).h(x) = 0$. La seconde méthode est valable pour les *équations trigonométriques du second ordre.* La dernière méthode se propose de résoudre les autres équations c'est-à-dire des équations ayant une autre forme que celles déjà évoquées. Cette méthode propose d'essayer de se ramener, grâce à des formules trigonométriques, à des équations dont une méthode de résolution a été donnée. Une partie du chapitre précédent est consacrée à ce type de calcul.

Inéquations

Encore une fois, les méthodes pour résoudre des inéquations sont présentées de la même façon dans les manuels *Mathématisons 53* (1984) et *Mathématisons 55* (1985). Deux sont exposées. Elles correspondent chacune à un type d'inéquation. La première méthode est celle *pour résoudre dans IR une inéquation du type* $\cos x > a, \sin x < b, \operatorname{tg} x \geq c$. La seconde méthode permet de *résoudre dans IR une inéquation du type* $a \cos x + b > 0, a \sin x + b > 0, a \operatorname{tg} x + b > 0$

Dans *Mathématisons 57* (1985), une méthode *pour résoudre dans IR une inéquation du type* $\cos x > a, \sin x < b, \operatorname{tg} x \geq c$ est d'abord développée. Ensuite, un paragraphe nommé *autres inéquations* conseille de *se ramener à des inéquations du type précédent.*

B.6 Équations et inéquations dans *Mathématique (M51, M52, M53) (De Boeck)*

Équations

Dans le *Mathématique M51* (1986), la résolution d'équations trigonométriques est introduite via la résolution de

$$\sin x = \frac{1}{2}.$$

Les solutions sont présentées des manières suivantes :

- Via l'ensemble des solutions
$$\left\{x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi\ : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ : k \in \mathbb{Z}\right\};$$
- Sur le cercle trigonométrique ;
- Sur le graphique de la fonction sinus ;

– Via toutes les valeurs possibles

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\pi}{6}, & \frac{\pi}{6}+2\pi, & \frac{\pi}{6}+4\pi, & \ldots & , \frac{\pi}{6}-2\pi, & \frac{\pi}{6}-4\pi \ldots \\ \frac{5\pi}{6}, & \frac{5\pi}{6}+2\pi, & \frac{5\pi}{6}+4\pi, & \ldots & , \frac{5\pi}{6}-2\pi, & \frac{5\pi}{6}-4\pi \ldots . \end{array}$$

Après l'introduction, deux types d'équations qui peuvent être *ramenées à une équation fondamentale* sont abordés. Le premier type sont les équations de la forme $\sin f(x) = m,\ \cos f(x) = m,\ \text{tg}\, f(x) = m$. Pour les résoudre, il suffit de poser $y = f(x)$. Le second type d'équation sont les équations du 1^{er} *degré ou du* $2^{éme}$ *degré en* $\cos x$ *(de même en* $\sin x$ $\text{tg}\, x,\ gx$*)*. Pour résoudre ce type d'équation, il faut poser $y = \cos x$ ou $y = \sin x$ ou ... .

A la suite de cela, les auteurs proposent la résolution de trois équations qui sont :

- $\cos x - 2\sin x = 0$;
- $\cos 6x - \cos 4x - \cos 2x + 1 = 0$;
- $\sin x + 3\cos x = 1$.

Ensuite, une présentation des solutions ainsi qu'une illustration sur le cercle trigonométrique est proposée pour les équations de la forme

$$\sin x = \sin y \;\; \cos x = \cos y \text{ et } \text{tg}\, x = \text{tg}\, y.$$

Pour l'égalité en sinus, l'équivalence suivante est proposée

$$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ : \ (x = y + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - y + 2k\pi)$$

et l'illustration sur le cercle trigonométrique (figure B.2). Enfin, deux exemples sont proposés.

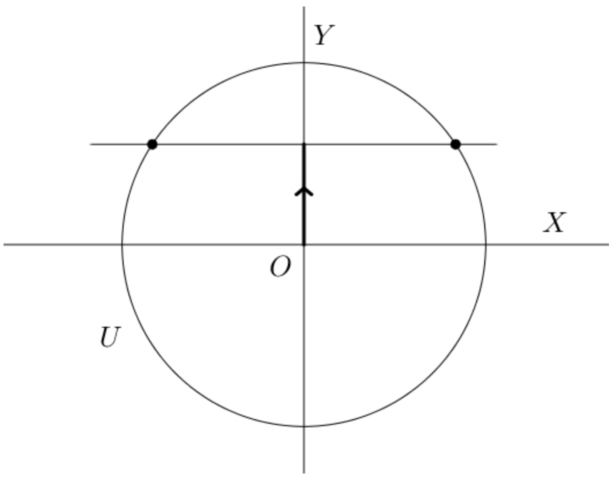


FIGURE B.2 – Illustration des solutions d'une équation du type sin $x = \sin\ y$ (inspiré de [12])

La présentation des équations trigonométriques dans le *Mathématique M52* (1986) est quasiment la même que celle du *Mathématique M51* (1986). Une différence est que, directement après l'introduction, le manuel décrit comment résoudre avec la calculatrice des équations du type $\sin x = m,\ \cos x = m,\ \text{tg}\, x = m$. L'exemple $\sin x + 3\cos x = 1$ n'est aussi pas abordé. Cela est dû au fait que dans les formules trigonométriques, l'expression de $\sin a$ et de $\cos a$ en fonction de $\text{tg}\, \frac{a}{2}$ n'a pas été abordée.

Après une introduction similaire aux deux autres manuels et une explication de l'utilisation de la calculatrice à l'instar de *Mathématique M52*, le *Mathématique M53* (1985) présente la résolution d' équations qui se ramènent facilement à des équations fondamentales. Enfin, la même explication de la résolution des équations de la forme

$$\sin x = \sin y \;\; \cos x = \cos y \text{ et } \text{tg}\, x = \text{tg}\, y.$$

est donnée.

Inéquations

La présentation de la résolution des inéquations trigonométriques se fait de la même façon dans les trois manuels. Cela se fait via deux exemples qui sont

$$\sin x > 0,5 \quad \text{et} \quad \cos 2x < -0,39.$$

La résolution se déroule en trois étapes, la première est l'observation des solutions sur le cercle trigonométrique (figure B.3). Le seconde consiste à la résolution de l'égalité provenant de l'inégalité c'est à dire $\sin x = 0,5$ afin de trouver *les points représentatifs des solutions*. La dernière est l'écriture de l'ensemble des solutions sous forme d'inégalités ou de la réunion d'intervalles.

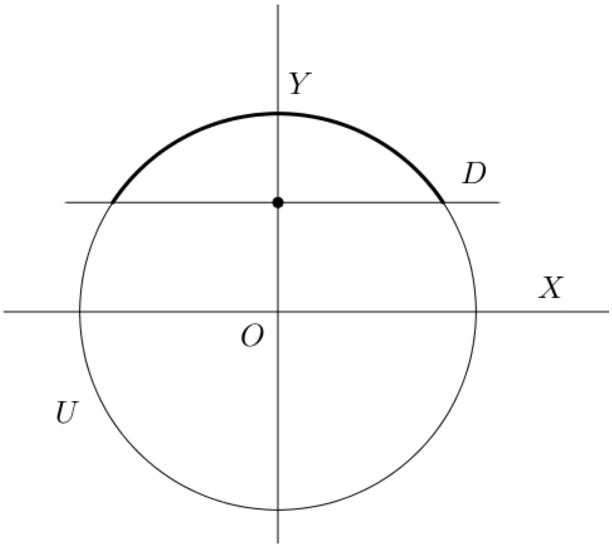


FIGURE B.3 – Illustration des solutions de l'équation $\sin x > 0,5$ (inspiré de [12])

B.7 Équations dans *Savoir et savoir-faire en Mathématique (H. Dessain)*

Ce livre propose aussi des résolutions d'équations trigonométriques simples à une seule inconnue ayant la forme $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$ ou $cotgx = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

B.8 Évolution de la présentation des différentes techniques de résolution des équations et des inéquations trigonométriques

Inversion des fonctions circulaires

Comme nous l'avons remarqué, dans le *Traité de Trigonométrie rectiligne*, l'*inversion des fonctions circulaires* reprend des éléments qui sont repris sous la dénomination*équations* dans les manuels. Nous avons choisi de les placer dans cette annexe afin de ne pas alourdir la lecture avec des éléments techniques.

Le manuel *Mathématique M41* (1976) développe la recherche de la valeur des arcs dont un nombre trigonométrique est donné. Ces équations sont appelées *équations fondamentales*. A partir d'un exemple chiffré, ce livre utilise les tables trigonométriques et un cercle trigonométrique afin de déterminer l'ensemble des solutions.

Le livre *Mathématique 2B* (1977) présente la résolution des *équations élémentaires*. Il s'agit d'abord de la recherche de la valeur d'arcs ayant le même nombre trigonométrique. Les formules de Simpson sont utilisées pour déterminer les solutions de ces problèmes. Ensuite, la méthode pour trouver la valeur des arcs dont un nombre trigonométrique est donné, est expliquée. Cette méthode consiste à se ramener au problème précédent. Par exemple pour $\sin x = a$, il faut trouver p la mesure de l'angle telle que $\sin p = a$ afin de pouvoir écrire $\sin x = \sin p$ et ainsi se ramener à ce qui a été fait précédemment.

Le manuel *Mathématisons 46* (1983) présente la recherche de la valeur des angles qui ont le même nombre trigonométrique. Cette recherche est illustrée avec un cercle trigonométrique. Cette section est aussi l'occasion de présenter les propriétés des angles associés.

Les manuels de la collection *Mathématisons* destinés aux élèves de cinquième secondaire présentent les équations élémentaires. Dans un premier temps, il s'agit de la résolution d'équations du type $\sin x = \sin a$; $\cos x = \cos a$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Dans un second temps, c'est la recherche de la valeur de x dans les équations du type $\sin x = t$; $\cos x = t$; $\operatorname{tg} x = t$ avec $t \in \mathbb{R}$. Cette recherche se base sur ce qui a été fait précédemment.

Les manuels de la collection *Mathématique* destinés aux élèves de cinquième secondaire présentent d'abord la résolution d'*équations fondamentales*. Il s'agit de la recherche de la valeur des angles dont un nombre trigonométrique est donné. Ensuite, ces manuels expliquent comment trouver la valeur des angles qui ont le même nombre trigonométrique.

Le manuel *Savoir et savoir-faire en Mathématique* (1985) présente la recherche de la valeur des angles dont un nombre trigonométrique est donné.

Manuel	$\sin x = a$ $\cos x = a$ $\operatorname{tg} x = a$	$\sin x = \sin a$ $\cos x = \cos a$ $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$
Traité (1941)	$\surd$	$\surd$
M41 (1976)	$\surd$	$\times$
Mathématique 2B (1977)	$\surd$	$\surd$
Mathématisons 46 (1983)	$\surd$	$\times$
Mathématisons 53 (1984)	$\surd$	$\surd$
Mathématisons 55 (1985)	$\surd$	$\surd$
Mathématisons 57 (1985)	$\surd$	$\surd$
M 53 (1985)	$\surd$	$\surd$
M 52 (1986)	$\surd$	$\surd$
M 51 (1986)	$\surd$	$\surd$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	$\surd$	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	$\surd$	$\times$

TABLE B.1 – Équations dites *élémentaires ou fondamentales*

Équations trigonométriques

Au cours du temps, la façon de présenter les différentes techniques de résolution des équations et des inéquations trigonométriques a subi des modifications. Cette évolution étant assez technique, nous l'avons placée dans l'annexe B. Le *Traité de Trigonométrie rectiligne* propose dans un premier temps une méthode générale pour résoudre les équations à une inconnue. Ensuite, différentes méthodes de résolution pour des équations particulières sont proposées. Ces équations sont :

- Les équations en sinus et cosinus ;
- Les équations homogènes en sinus et cosinus ;
- Les équations symétriques en sinus et cosinus.

Trois méthodes de résolution sont présentées pour résoudre des équations de la forme $a \cos x + b \sin x = c$.

Après avoir présenté les *équations fondamentales*, le manuel *Mathématique M41* (1976) présente une méthode pour résoudre les équations du type $\sin f(x) = m$, $\cos f(x) = m$, $\operatorname{tg} f(x) = m$ et une méthode pour résoudre des équations du second degré en $\sin x$, $\cos x$ ou $\operatorname{tg} x$.

Après le développement des équations élémentaires, le livre *Mathématique 2B* (1977) expose sa méthode pour résoudre une équation trigonométrique : il faut se ramener à une équation élémentaire. L'utilisation des formules trigonométriques ainsi que la règle du produit nul sont cités comme principes de résolution.

Le livre *Mathématisons 46* (1983) montre comment résoudre les équations de la forme

$$\begin{aligned} \sin ax &= b; \\ \cos ax &= b; \\ \operatorname{tg} ax &= b. \end{aligned}$$

Après avoir présenté la résolution des deux types de fonctions trigonométriques mentionnés à la section B.8, les ouvrages de la collection *Mathématisons* destinés à la cinquième secondaire préconisent de se ramener aux équations élémentaires pour résoudre les autres équations. De plus, le manuel *Mathématisons 57* donne une méthode pour résoudre des équations du type *produit de facteurs égalé à zéro* et des équations trigonométriques du second degré.

Après la présentation de la résolution des équations fondamentales, les manuels de la collection *Mathématique* destinés aux élèves de cinquième secondaire présentent, via des exemples, différentes techniques de résolutions d'équations. Ces techniques sont reprises dans le tableau ci-dessous.

Nom du manuel	$\sin ax = m$ $\cos ax = m$ $\operatorname{tg} ax = m$	$2^{\text{ème}}$ degré	Principe [1] de disjonction	Poser $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$	Équations Homogènes
Traité de Trigonométrie	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
M41 (1976)	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
Mathématique 2B (1977)	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$
Mathématisons 46 (1983)	$\times$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$	$\times$
Mathématisons 53 (1984)	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Mathématisons 55 (1985)	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Mathématisons 57 (1985)	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$
M 53 (1985)	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\times$	$\checkmark$
M 52 (1986)	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\times$	$\checkmark$
M 51 (1986)	$\times$	$\times$	$\checkmark$	$\checkmark$	$\checkmark$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4B (1985)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
Savoir & savoir-faire en mathématique 4 (1994)	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

TABLE B.2 – Les différents types d'équations

Inéquations trigonométriques

Le *Traité de Trigonométrie rectiligne* ainsi que les livres pour les élèves de cinquième secondaire de la collection *Mathématique* et *Mathématisons* présentent la résolution d'inéquations trigonométriques de la même façon. Il faut d'abord résoudre l'équation avant de reporter les solutions sur un cercle trigonométrique afin de résoudre l'inéquation.

1. Nom venant de la série *Mathématique*. Ce principe peut s'énoncer comme $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0 \vee B = 0$ où A et B sont des *expressions en une inconnue*. Dans le manuel *Mathématisons 57*, ce principe est évoqué sous le nom de ≪ produit de facteurs égalé à zéro ≫.

Annexe C

Questionnaire à destination des élèves

1. Définis ce qu'est la trigonométrie :

2. Cite quelques professions qui font appel à l'emploi de la trigonométrie :

3. Si tu la connais, explique la signification des mots suivants. Tu peux t'aider d'un schéma :

   - Degré
   - Grade
   - Radian

- Sinus
- Cosinus
- Tangente
- Cotangente

4. Quelles sont les unités du cosinus et du sinus ?

5. As-tu souvent utilisé ta calculatrice pour ce chapitre de trigonométrie ?

◯ pas du tout ◯ un peu ◯ régulièrement ◯ beaucoup

6. Qu'est-ce qu'un cercle trigonométrique ? À quoi sert-il ? Dessine-en-un.

7. Explique comment trouver le sinus et le cosinus d'un angle droit ?

Annexe D

La règle à calcul

D.1 Introduction

La règle à calcul est l'ancêtre des machines à calculer. Elle permet de réaliser rapidement un certain nombre de calculs allant de la multiplication à la mise au logarithme en passant par les calculs trigonométriques. Ce sont ces derniers qui nous intéressent.

La figure D.1 à la page 107 est une photographie d'une règle à calcul de la marque *Aristo*.

D.2 Utilisation de la règle à calcul

Dans cette partie, nous allons expliquer l'utilisation de la règle à calcul pour réaliser des calculs trigonométriques. Plusieurs cas de figures seront envisagés et, pour la plupart d'entre eux, le maniement de la règle sera expliqué via des exemples.

Valeur du sinus d'un angle α dont la mesure est comprise entre $5,7^\circ$ et 90°

Pour calculer le sinus d'un angle dont la mesure est comprise dans cet intervalle, nous allons utiliser l'échelle C et l'échelle S présentes sur la règle. Si par exemple nous recherchons la valeur de $\sin 35^\circ$, il faut placer le curseur mobile sur la graduation noire correspondant à la valeur α sur l'échelle S. Ici, c'est le 35. Ensuite, nous regardons la valeur donnée par le curseur mobile sur l'échelle C. Dans notre exemple, cette valeur est proche de $5,7$. L'échelle C étant graduée comme $10 \cdot \sin(\alpha)$, il faut diviser la valeur obtenue par 10. Dès lors, nous pouvons dire que $\sin 35^\circ \simeq 0,57$.

Valeur d'un angle α à partir d'une valeur de sinus comprise entre $0,1$ et 1

Pour réaliser cette recherche, nous utiliserons les échelles C et S. Recherchons, par exemple, la mesure d'un angle α telle que $\sin \alpha = 0,3$. Comme nous allons utiliser l'échelle C, nous devons d'abord multiplier par dix la valeur donnée. Ensuite nous plaçons le curseur mobile en face de la graduation de l'échelle C correspondant à la valeur calculée, c'est-à-dire 3. Il suffit alors de lire sur l'échelle S la valeur montrée par le curseur. Ici, le curseur se trouve entre $17,4$ et $17,5$. L'angle α mesure donc $17,45^\circ$.

Valeur de la tangente d'un angle α dont la mesure est comprise entre $5,7^\circ$ et 45°

Le mode opératoire est proche de celui qui a été expliqué pour la recherche de la valeur du sinus d'un angle. La seule différence est que l'échelle S est remplacée par l'échelle T. Il faut donc placer le curseur sur la graduation correspondant à la valeur de α sur cette échelle et diviser par dix la valeur lue sur l'échelle C afin de connaître la valeur de la tangente de l'angle considéré.

Valeur de la mesure d'un angle α à partir d'une valeur de tangente comprise entre $0,1$ et 1

Le mode opératoire est proche de celui qui a été expliqué pour la recherche de la mesure d'un angle à partir de la valeur de son sinus. La seule différence est que l'échelle S est remplacée par l'échelle T. Il faut donc lire la valeur de la mesure de l'angle α sur l'échelle T.

Valeur du sinus et de la tangente d'un angle α compris entre $0,573^\circ$ et $5,7^\circ$

Pour réaliser cette recherche, nous allons utiliser les échelles C et ST. Remarquons que pour les angles compris dans cet intervalle, nous pouvons considérer que la valeur de leur tangente et la valeur de leur sinus sont assez proches. Dés lors, la recherche de la valeur d'un angle à partir de la tangente se fait sur même échelle que la recherche de la valeur d'un angle à partir du sinus.

Recherchons par exemple la valeur de $\sin 4^\circ$. Nous plaçons d'abord le curseur mobile à la graduation 4 de l'échelle ST. Nous lisons ensuite la valeur indiquée par le curseur sur l'échelle C. Ici, cette valeur vaut $6,95$. Pour les angles compris dans cet intervalle, l'échelle C correspond à $100 \cdot sin\alpha$. Nous devons donc diviser par 100 la valeur donnée par l'échelle C. Dès lors, avec la règle à calcul, nous avons trouvé que $\sin 4^\circ \simeq 0.0695$.

Valeur de la mesure d'un angle α à partir d'une valeur de sinus ou de tangente comprise entre $0,01$ et $0,1$

Par exemple, cherchons la valeur de la mesure de l'angle α telle que $\sin\alpha = 0.05$. Nous allons multiplier la valeur donnée par 100. Nous reportons alors le résultat obtenu par cette multiplication, 5, avec le curseur sur l'échelle C. Nous lisons alors le valeur indiquée par le curseur sur l'échelle ST qui correspond à la valeur de la mesure de l'angle. Pour cet exemple, le curseur indique $2,86$. Donc $\alpha = 2,86^\circ$.

Remarquons que les considérations faites à la section précédente sont ici encore d'actualité. La recherche d'un angle à partir d'une valeur de la tangente se fera sur la même échelle que la recherche d'un angle à partir d'une valeur du sinus, c'est-à-dire ST.

Valeur du sinus et de la tangente d'un angle α compris entre 0° et $0,573^\circ$

Pour les angles faisant partie de cet intervalle, la valeur du sinus et de la tangente est approchée par l'angle considéré exprimé en radians. Par exemple $\sin 0,3^\circ = 0.0052$ est une bonne approximation de la valeur de ce sinus car $0.3^\circ = 0.0052 rad$.

Valeur de la mesure d'un angle α à partir d'une valeur de sinus ou de tangente comprise entre 0 et $0,01$

Ici, la valeur du sinus ou de la tangente est une bonne approximation de la valeur de la mesure en radians de l'angle recherché. Par exemple, si $\mathrm{tg}\,\alpha = 0,008$, dire que la mesure de l'angle α vaut $0,008 rad$, c'est-à-dire $0,46^\circ$, est une bonne approximation.

Autres

Les problèmes faisant intervenir le cosinus se font par passage au sinus en utilisant le fait que le cosinus d'un angle est égal au sinus de son angle complémentaire.

La recherche de la valeur de la tangente des angles dont la mesure est comprise entre 45° et 90° se fait en utilisant les propriétés des nombres trigonométriques des angles complémentaires via la formule $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{1}{tg(90^\circ - \alpha)}$.

Pour des recherches impliquant des angles dont la mesure est supérieure à 90°, il faut passer par la réduction au premier quadrant.

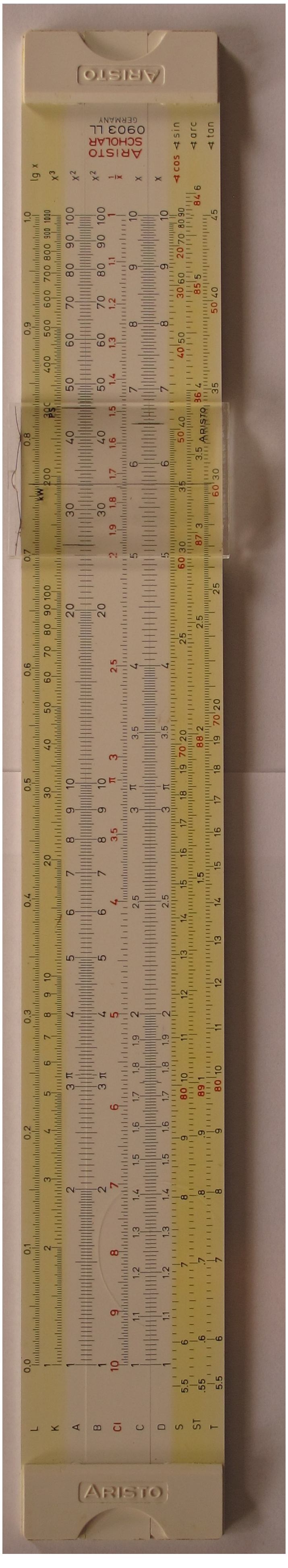


Figure D.1 – Règle à calcul de la marque *Aristo*

Table des figures

1.1 Illustration de la transposition didactique . . . 3
1.2 Indépendance des nombres trigonométriques par rapport à la position du segment (inspiré de [21]) . . . 7
1.3 Hexagone régulier servant à la recherche des nombres trigonométriques d'un angle de 30° (inspiré de [21]) . . . 8
1.4 Cercle trigonométrique (inspiré de [21]) . . . 9
1.5 Illustration de la définition de la mesure d'un angle dirigé (inspiré de [21]) . . . 10
1.6 Illustration du sinus et du cosinus (inspiré de [21]) . . . 11
1.7 Illustration des signes des nombres trigonométriques (inspiré de [21]) . . . 13
1.8 Représentation de la tangente (inspiré de [21]) . . . 14
1.9 Illustration des variations du sinus et du cosinus (inspiré de [21]) . . . 15
1.10 Représentation de la *sinusoïde* (inspiré de [21]) . . . 16
1.11 Représentation de la *cosinusoïde* (inspiré de [21]) . . . 16
1.12 Illustration des variations de la tangente et de la cotangente (inspiré de [21]) . . . 17
1.13 Illustration de la *tangentoïde* (inspiré de [21]) . . . 18

3.1 Illustration du déplacement des angles (inspiré de [11]) . . . 28
3.2 Illustration de la mesure d'un angle (extrait de [11]) . . . 29
3.3 Illustration des quatre quadrants (extrait de [11]) . . . 30
3.4 Mesure d'un angle orienté (inspiré de [11]) . . . 31
3.5 Illustration d'une droite normale (extrait de [11]) . . . 32
3.6 Cercle trigonométrique (inspiré de [2]) . . . 36
3.7 Mesure d'un angle (inspiré de [2]) . . . 38
3.8 Schéma accompagnant les définitions de sinus et de cosinus (extrait de [2]) . . . 39
3.9 Mesure d'un angle orienté (extrait de [1]) . . . 43
3.10 Cercle trigonométrique (inspiré de [1]) . . . 44
3.11 Premier et deuxième quadrant (inspiré de [1]) . . . 44
3.12 Troisième et quatrième quadrant (inspiré de [1]) . . . 44
3.13 Nombres trigonométriques (inspiré de [1]) . . . 45
3.14 Illustration de la définition de la tangente (inspiré de [12]) . . . 52
3.15 Cercle trigonométrique et point-image (inspiré de [13]) . . . 53
3.16 Plusieurs représentants de l'angle orienté de 60° (inspiré de [6]) . . . 56

4.1 Illustration du sinus et du cosinus (inspiré de [21]) . . . 61
4.2 Lien entre les différentes formules trigonométriques . . . 67
4.3 Mesure d'un angle orienté (extrait de [1]) . . . 70
4.4 Deux arcs mesurant $\frac{\pi}{3}$ . . . 71

A.1 Tables des valeurs naturelles en degré (extrait de [22]) . . . 87
A.2 Tables des valeurs naturelles en grade (extrait de [22]) . . . 88
A.3 Tables des logarithmes des nombres trigonométriques en degré (extrait de [22]) . . . 89
A.4 Tables des logarithmes des nombres trigonométriques en grade (extrait de [22]) . . . 90

B.1 Illustration de la recherche des *arcs ayant un sinus donné* (inspiré de [21]) . . . 91
B.2 Illustration des solutions d'une équation du type $\sin\ x = \sin\ y$ (inspiré de [12]) . . . 97
B.3 Illustration des solutions de l'équation $\sin x > 0,5$ (inspiré de [12]) . . . 98

D.1 Règle à calcul de la marque *Aristo* . . . 107